

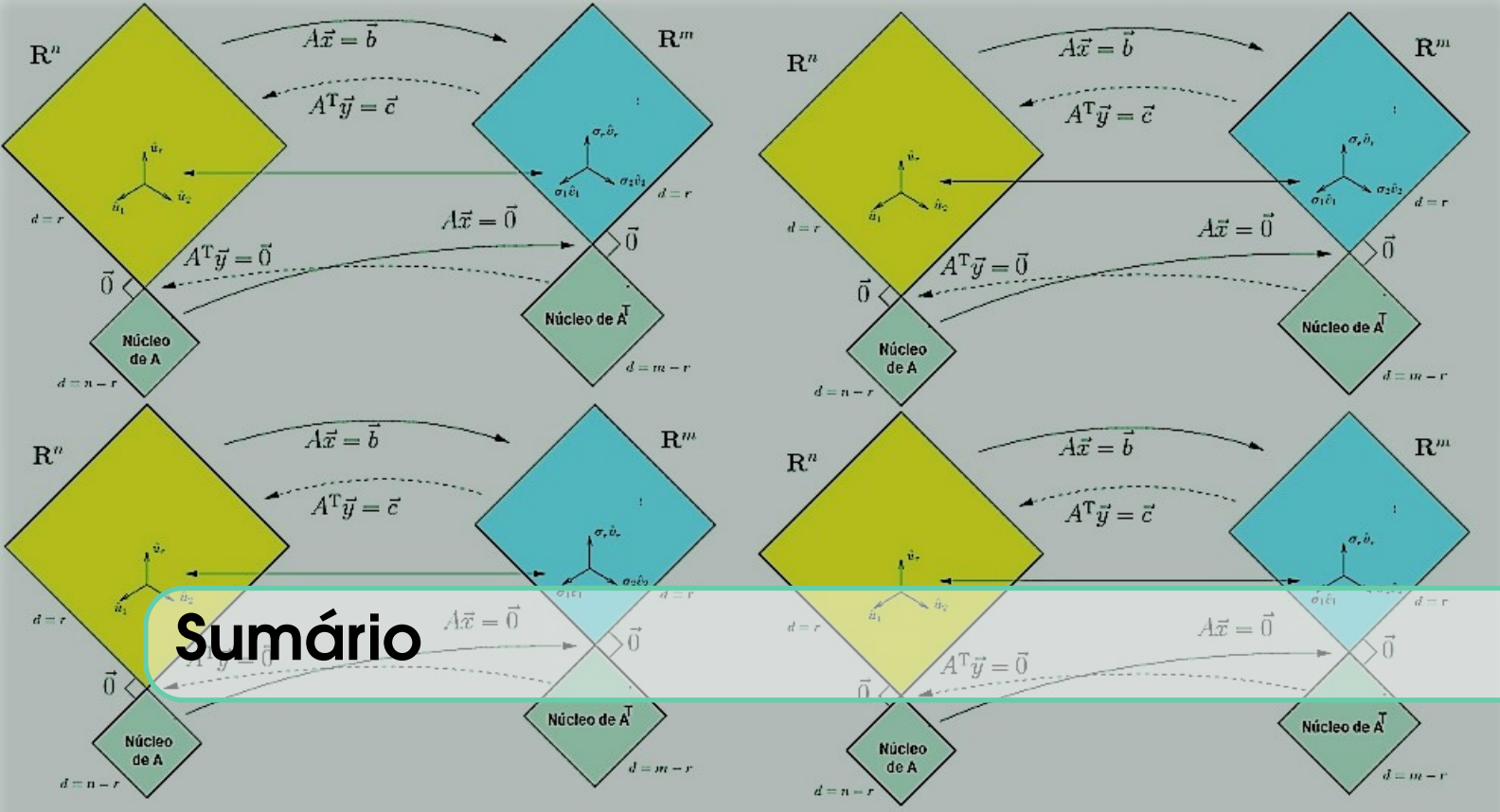
A word cloud in the background of the page, featuring various mathematical terms in Portuguese related to linear algebra. The words are arranged in a circular pattern, with some terms appearing more frequently than others. The colors of the words range from light green to dark green.

Álgebra Linear A

Caderno de Exercícios com Soluções

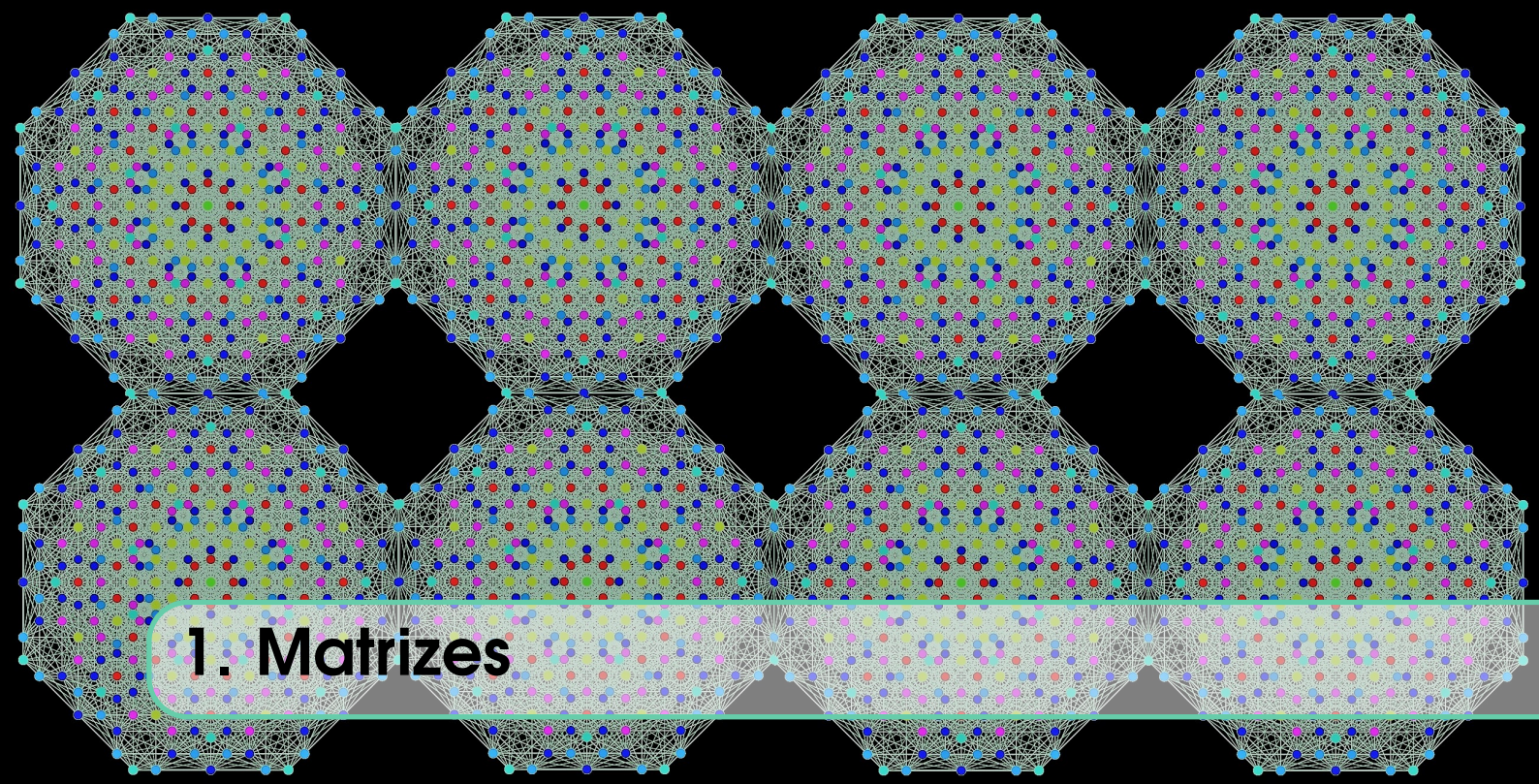
Simone Moraes - Versão 2022

DMAT - IME - UFBA



1	Matrizes	5
1.1	Definição de Matrizes	5
1.2	Operações com Matrizes	7
1.3	Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais	10
1.4	Matrizes Hermitianas e Matrizes Normais	15
1.5	Determinante	18
1.6	Matriz Inversa	24
1.7	Miscelânea	32
1.8	Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada	36
2	Sistemas de Equações Lineares	41
2.1	Forma Matricial de um Sistema Linear	41
2.2	Classificação e Solução de Sistemas Lineares	42
2.3	Teorema do Posto	45
2.4	Resolução de Sistemas Lineares	56
2.5	Método da Matriz Inversa	64
2.6	Regra de Cramer	66
2.7	Miscelânea	68
2.8	Aplicações de Sistemas Lineares	70
3	Espaços Vetoriais	87
3.1	Espaços Vetoriais	87
3.2	Subespaços Vetoriais	90
3.3	Soma e Intersecção de Subespaços Vetoriais	97
3.4	Combinação Linear	105

3.5	Subespaço Gerado	108
3.6	Dependência e Independência Linear	119
3.7	Base e Dimensão	124
3.8	Coordenadas de um Vetor e Mudança de Base	143



1. Matrizes

1.1 Definição de Matrizes

1. As matrizes A , B , C , D e E tem ordens 4×3 , 4×5 , 3×5 , 2×5 e 3×5 , respectivamente. Determine quais das seguintes expressões matriciais são possíveis e a ordem de cada uma:

(a) $AE + B^T$; (b) $C(D^T + B)$; (c) $AC + B$; (d) $E^T(CB)$.

Solução:

- (a) Não é possível, pois AE tem ordem 4×5 , mas não é possível somar com B^T que tem ordem 5×4 , distintas.
- (b) Não é possível somar $D_{5 \times 2}^T$ e $B_{4 \times 5}$ pois têm ordens distintas.
- (c) $(A_{4 \times 3} \cdot C_{3 \times 5})_{4 \times 5} + B_{4 \times 5}$ tem ordem 4×5 ;
- (d) Não é possível multiplicar C por B , pois o número de colunas de C é igual 5 que é diferente do número de colunas de B , que é igual a 4.
2. Sejam A , B , C e D matrizes tais que AB^T de ordem 5×3 e que $(C^T + D)B$ de ordem 4×6 . Determine a ordem de cada uma destas matrizes.

Solução:

AB^T que tem ordem $5 \times 3 \implies A_{5 \times k}$ e $B_{k \times 3}^T \implies B_{3 \times k}$.

Como $(C^T + D)B$ de ordem $4 \times 6 \implies C^T$ e D têm ordem $4 \times l$ e $B_{l \times 6}$.

Logo, $B_{3 \times 6}$, $A_{5 \times 6}$, C^T e D são de ordem 4×3 e portanto $C_{3 \times 4}$.

3. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 7 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 11 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, determine:

- (a) A ordem de A ;
- (b) Os elementos a_{23} , a_{35} e a_{43} .

Solução:

- (a) A matriz A tem ordem 4×5 , pois tem 4 linhas e 5 colunas.
- (b) $a_{23} = 11$, $a_{35} = 3$ e $a_{43} = -4$, pois são os elementos localizados, respectivamente, 2ª linha e 3ª coluna; 3ª linha e 5ª coluna e 4ª linha e 3ª coluna.
4. Determine a matriz quadrada, $A = (a_{ij})$, de ordem 4 cujos elementos são dados por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - 3j, & \text{se } i < j \\ i^2 + 2j, & \text{se } i = j \\ -3i + 4j, & \text{se } i > j \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1^2 + 2 \times 1 & 2 \times 1 - 3 \times 2 & 2 \times 1 - 3 \times 3 & 2 \times 1 - 3 \times 4 \\ -3 \times 2 + 4 \times 1 & 2^2 + 2 \times 2 & 2 \times 2 - 3 \times 3 & 2 \times 2 - 3 \times 4 \\ -3 \times 3 + 4 \times 1 & -3 \times 3 + 4 \times 2 & 3^2 + 2 \times 3 & 2 \times 3 - 3 \times 4 \\ -3 \times 4 + 4 \times 1 & -3 \times 4 + 4 \times 2 & -3 \times 4 + 4 \times 3 & 4^2 + 2 \times 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -4 & -7 & -10 \\ -2 & 8 & -5 & -8 \\ -5 & -1 & 15 & -6 \\ -8 & -4 & 0 & 24 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Determine números reais x, y, z e t tais que $\begin{bmatrix} 2x+y & t \\ z-t & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & y+2z \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} 2x+y & t \\ z-t & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & y+2z \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x+y = 3 \\ t = -1 \\ z-t = 0 \\ y+2z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -1 \\ z=t = -1 \\ y = 3-2z = 5 \\ x = \frac{3-y}{2} = -1 \end{cases}$$

6. (a) A **matriz de Hilbert** em $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz $H_n = [h_{ij}]$ definida por: $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$, determine a matriz de Hilbert para $n = 4$.
- (b) A **matriz de Pascal** em $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz $P_n = [p_{ij}]$ definida por: $p_{ij} = \frac{(i+j-2)!}{(i-1)!(j-1)!}$, determine a matriz de Pascal para $n = 5$.

Solução:

$$(a) H_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+1-1} & \frac{1}{1+2-1} & \frac{1}{1+3-1} & \frac{1}{1+4-1} \\ \frac{1}{2+1-1} & \frac{1}{2+2-1} & \frac{1}{2+3-1} & \frac{1}{2+4-1} \\ \frac{1}{3+1-1} & \frac{1}{3+2-1} & \frac{1}{3+3-1} & \frac{1}{3+4-1} \\ \frac{1}{4+1-1} & \frac{1}{4+2-1} & \frac{1}{4+3-1} & \frac{1}{4+4-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

é a matriz de Hilbert para $n = 4$.

$$P_5 = \begin{bmatrix} \frac{(1+1-2)!}{(1-1)!(1-1)!} & \frac{(1+2-2)!}{(1-1)!(2-1)!} & \frac{(1+3-2)!}{(1-1)!(3-1)!} & \frac{(1+4-2)!}{(1-1)!(4-1)!} & \frac{(1+5-2)!}{(1-1)!(5-1)!} \\ \frac{(2+1-2)!}{(2-1)!(1-1)!} & \frac{(2+2-2)!}{(2-1)!(2-1)!} & \frac{(2+3-2)!}{(2-1)!(3-1)!} & \frac{(2+4-2)!}{(2-1)!(4-1)!} & \frac{(2+5-2)!}{(2-1)!(5-1)!} \\ \frac{(3+1-2)!}{(3-1)!(1-1)!} & \frac{(3+2-2)!}{(3-1)!(2-1)!} & \frac{(3+3-2)!}{(3-1)!(3-1)!} & \frac{(3+4-2)!}{(3-1)!(4-1)!} & \frac{(3+5-2)!}{(3-1)!(5-1)!} \\ \frac{(4+1-2)!}{(4-1)!(1-1)!} & \frac{(4+2-2)!}{(4-1)!(2-1)!} & \frac{(4+3-2)!}{(4-1)!(3-1)!} & \frac{(4+4-2)!}{(4-1)!(4-1)!} & \frac{(4+5-2)!}{(4-1)!(5-1)!} \\ \frac{(5+1-2)!}{(5-1)!(1-1)!} & \frac{(5+2-2)!}{(5-1)!(2-1)!} & \frac{(5+3-2)!}{(5-1)!(3-1)!} & \frac{(5+4-2)!}{(5-1)!(4-1)!} & \frac{(5+5-2)!}{(5-1)!(5-1)!} \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad = \begin{bmatrix} \frac{0!}{0!0!} & \frac{1!}{0!1!} & \frac{2!}{0!2!} & \frac{3!}{0!3!} & \frac{4!}{0!4!} \\ \frac{1!}{1!0!} & \frac{2!}{1!1!} & \frac{3!}{1!2!} & \frac{4!}{1!3!} & \frac{5!}{1!4!} \\ \frac{2!}{2!0!} & \frac{3!}{2!1!} & \frac{4!}{2!2!} & \frac{5!}{2!3!} & \frac{6!}{2!4!} \\ \frac{3!}{3!0!} & \frac{4!}{3!1!} & \frac{5!}{3!2!} & \frac{6!}{3!3!} & \frac{7!}{3!4!} \\ \frac{4!}{4!0!} & \frac{5!}{4!1!} & \frac{6!}{4!2!} & \frac{7!}{4!3!} & \frac{8!}{4!4!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{bmatrix}$$

é a matriz de Pascal para $n = 5$.

1.2 Operações com Matrizes

1. Determine números reais x e y tais que $\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\begin{bmatrix} x^3 & y^2 \\ y^2 & x^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x & 3y \\ 4y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x^3 - x & y^2 + 3y \\ y^2 + 4y & x^2 + 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y^2 + 3y = 4 \\ y^2 + 4y = 5 \\ x^2 + 2x = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x(x^2 - x) = 0 \\ y = 1 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

2. Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A \cdot B$ e $D = B \cdot A$,

determine os elementos c_{32} e d_{43} .

Solução:

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} + a_{34}b_{42} = 1 \times 3 + 2 \times 1 + (-1) \times 2 + 5 \times 3 = 3 + 2 - 2 + 15 = 18;$$

$$d_{43} = b_{41}a_{13} + b_{42}a_{23} + b_{43}a_{33} = 4 \times 3 + 3 \times 4 + 1 \times (-1) = 12 + 12 - 1 = 23.$$

3. Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, determine A^2 ; A^3 ; A^{31} ; A^{42} .

Solução:

$$\begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + (-1) \times 3 & 2 \times (-1) + (-1) \times (-2) \\ 3 \times 2 + (-2) \times 3 & 3 \times (-1) + (-2) \times (-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Logo, $A^3 = A^2 \cdot A = I_2 \cdot A = A$.

De modo geral, para $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ temos: $A^k = \begin{cases} I_2 & \text{se } k \text{ é par} \\ A & \text{se } k \text{ é ímpar} \end{cases}$.

Consequentemente, $A^{31} = A$ e $A^{42} = I_2$.

4. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine, se possível:

- (a) $4E - 2D$; (b) $2A^T + C$; (c) $(2E^T - 3D^T)^T$; (d) $(BA^T - 2C)^T$;
 (e) $(-AC)^T + 5D^T$; (f) $B^T(CC^T - A^TA)$; (g) $D^TE^T - (ED)^T$.

Solução:

$$\begin{aligned} \text{(a) } 4E - 2D &= 4 \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 4 & 12 \\ -4 & 4 & 8 \\ 16 & 4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 10 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 22 & -6 & 8 \\ -2 & 4 & 6 \\ 10 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) } 2A^T + C &= 2 \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{(c) } (2E^T - 3D^T)^T = 2E - 3D = 2 \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -13 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{(d) } (BA^T - 2C)^T &= AB^T - 2C^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T - 2 \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -14 & 2 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(e)} \quad (-AC)^T + 5D^T &= -C^T A^T + 5D^T = - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T + 5 \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T \\
&= - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
&= - \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 12 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -5 & 15 \\ 25 & 0 & 10 \\ 10 & 5 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{bmatrix}. \\
\text{(f)} \quad B^T(CC^T - A^T A) &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 21 & 17 \\ 17 & 35 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ 18 & 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 72 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}. \\
\text{(g)} \quad D^T E^T - (ED)^T &= D^T E^T - D^T E^T = 0_{3 \times 3}.
\end{aligned}$$

5. Uma matriz A em $M_n(\mathbb{K})$ é chamada idempotente se $A^2 = A$, mostre que:

(a) Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ são tais que $A \cdot B = A$ e $B \cdot A = B$, então A e B são idempotentes.

(b) A matriz $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ é idempotente.

Solução:

(a) $A^2 = A \cdot A \stackrel{AB=A}{=} (AB) \cdot (AB) = A(BA)B \stackrel{BA=B}{=} (AB)B \stackrel{AB=A}{=} AB = A$, logo A é idempotente.

Analogamente mostramos que B é idempotente.

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, portanto é idempotente.

6. Determine, se possível:

(a) Números reais x e y tais que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ comutam.

(b) Todas as matrizes em $M_2(\mathbb{R})$ que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução:

(a) As matrizes A e B comutam se, e somente se, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{bmatrix} 2x & 1+2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x+y & 2x \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 2x = 1 \\ x+y = 1 \\ 1+2y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1/2 \\ y = -1/2 \end{cases}.$$

Logo, as matrizes A e B comutam se, e somente se, $x = \frac{1}{2}$ e $y = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{bmatrix} \\
 \implies \begin{cases} a+c &= a \\ b+d &= a+b \\ c+d &= d \end{cases} \implies \begin{cases} c &= 0 \\ a &= d \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Logo, as matrizes que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ são do tipo $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

7. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule $A + A^T$ e $A \cdot A^T$.

Solução:

Observemos que a matriz A é simétrica, pois $A = A^T$, logo

$$A + A^T = A + A = 2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$A \cdot A^T = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 & 8 \\ 20 & 29 & 11 \\ 8 & 11 & 5 \end{bmatrix}.$$

8. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{R})$, se $A \cdot B = B \cdot A$, mostre que:

- (a) $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2$;
- (b) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
- (c) $(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$.

Solução:

$$(a) \quad (A \pm B)^2 = (A \pm B) \cdot (A \pm B) = A^2 \pm AB \pm BA + B^2 \stackrel{AB=BA}{=} A^2 \pm 2AB + B^2.$$

$$(b) \quad (A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 \stackrel{AB=BA}{=} A^2 - B^2.$$

$$\begin{aligned}
 (c) \quad (A - B)(A^2 + AB + B^2) &= A^3 + A^2B + AB^2 - BA^2 - BAB - B^3 \\
 &= A^3 + A(AB) + (AB)B - (BA)A - (BA)B - B^3 \\
 &\stackrel{AB=BA}{=} A^3 + A(BA) + (AB)B - (AB)A - (AB)B - B^3 = A^3 - B^3.
 \end{aligned}$$

1.3 Matrizes Simétricas e Matrizes Ortogonais

1. Determine, em cada um dos casos abaixo, números reais x , y e z tais que a matriz A seja simétrica.

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix}.$$

Solução:

(a) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} -2 & x \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ x & 1 \end{bmatrix} \iff x = 4.$$

(b) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 8 & x+3 & -10 \\ 15 & -5 & -8 \\ y-2 & 2z & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 15 & y-2 \\ x+3 & -5 & 2z \\ -10 & -8 & 9 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x+3 = 15 \\ y-2 = -10 \\ 2z = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 12 \\ y = -8 \\ z = -4 \end{cases}.$$

(c) A é simétrica se, e somente se, $A = A^T$, ou seja, se, e somente se,

$$\begin{bmatrix} 8 & x^2+3 & -5 \\ 7 & -9 & 4 \\ y+x & z+3x & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 & y+x \\ x^2+3 & -9 & z+3x \\ -5 & 4 & 11 \end{bmatrix} \\ \iff \begin{cases} x^2+3 = 7 \\ y+x = -5 \\ z+3x = 4 \end{cases} \implies x^2 = 4 \implies \begin{cases} x=2, & y=-7, & z=-2 \\ \text{ou} \\ x=-2, & y=-3, & z=10 \end{cases}.$$

2. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em simétrica e anti-simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A, \text{ logo } A \text{ é anti-simétrica.}$$

Se B fosse matriz simétrica teríamos $b_{jk} = b_{kj}$, para todo j e todo k , mas $b_{12} = 1-i \neq 1+i = b_{21}$, portanto B não é simétrica.

Se B fosse matriz anti-simétrica teríamos $b_{jk} = -b_{kj}$, para todo j e todo k , em particular os elementos da diagonal principal seriam todos nulos, mas $b_{11} = 1 \neq 0$, portanto B não é anti-simétrica.

$$C^T = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix} = C, \text{ portanto } C \text{ é simétrica.}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} = D, \text{ portanto } D \text{ é simétrica.}$$

$$E^T = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -2+i & 3 \\ 2-i & 0 & -i \\ -3 & i & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix} = -E, \\ \text{portanto } E \text{ é anti-simétrica.}$$

Se F fosse matriz simétrica teríamos $f_{jk} = f_{kj}$, para todo j e todo k , mas $f_{13} = -3 + 6i \neq 3 + 6i = b_{31}$, portanto F não é simétrica.

Se F fosse matriz anti-simétrica teríamos $f_{jk} = -f_{kj}$, para todo j e todo k , em particular os elementos da diagonal principal seriam todos nulos, mas $f_{22} = 20i \neq 0$, portanto F não é anti-simétrica.

3. Sejam A e B matrizes em $M_n(\mathbb{K})$, com $n > 1$ e α e β escalares em $\mathbb{K}$, mostre que:

- (a) $A + A^T$ é simétrica e $A - A^T$ é anti-simétrica.
- (b) Se A e B são simétricas, então $\alpha A + \beta B$ também o é.
- (c) Se A e B são anti-simétricas, então $\alpha A + \beta B$ também o é.
- (d) Se A e B são simétricas, então $A \cdot B$ é simétrica se, e somente se, A e B comutam.

Solução:

(a) $(A + A^T)^T \stackrel{T_2}{=} A^T + (A^T)^T \stackrel{T_1}{=} A^T + A = A + A^T$, portanto $A + A^T$ é simétrica.

$(A - A^T)^T \stackrel{T_2}{=} A^T - (A^T)^T \stackrel{T_1}{=} A^T - A = -(A - A^T)$, portanto $A - A^T$ é anti-simétrica.

(b) $(\alpha A + \beta B)^T \stackrel{T_2 \text{ e } T_3}{=} \alpha A^T + \beta B^T \stackrel{A, B \text{ simét.}}{=} \alpha A + \beta B$, portanto $\alpha A + \beta B$ é simétrica.

(c) $(\alpha A + \beta B)^T \stackrel{T_2 \text{ e } T_3}{=} \alpha A^T + \beta B^T \stackrel{A, B \text{ anti-sim.}}{=} \alpha(-A) + \beta(-B) = -(\alpha A + \beta B)$, portanto $\alpha A + \beta B$ é anti-simétrica.

(d) Se $A \cdot B$ é simétrica, então $(A \cdot B)^T = A \cdot B$, mas $(A \cdot B)^T \stackrel{T_4}{=} B^T \cdot A^T \stackrel{A, B \text{ simét.}}{=} B \cdot A$, logo $A \cdot B = B \cdot A$.

Reciprocamente, se A e B são simétricas e comutam, então $(A \cdot B)^T \stackrel{T_4}{=} B^T \cdot A^T \stackrel{A, B \text{ simét.}}{=} B \cdot A = A \cdot B$, ou seja, $A \cdot B$ é simétrica

4. Determine, se possível, números reais x e y de modo que a matriz A seja ortogonal, nos seguintes casos:

$$(a) A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Solução:

(a) A é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$ se e somente se,

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \iff x^2 = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

(b) A é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$ se e somente se,

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & y \\ x & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 2+x^2 & \sqrt{2}(y+x) \\ \sqrt{2}(y+x) & 2+y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mas, como $x \in \mathbb{R}$ a equação $2+x^2 = 1 \iff x^2 = -1$ não tem solução.

Portanto, não existem x e y números reais tal que a matriz $A = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & x \\ y & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ seja ortogonal.

5. Verifique quais das matrizes abaixo é ortogonal.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ portanto } A \text{ é ortogonal.}$$

$$B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & \\ & \end{bmatrix} \neq I_2, \text{ portanto } B \text{ não é matriz ortogonal.}$$

$$C \cdot C^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} + \frac{8}{9} & \frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9} \\ \frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9} & \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, C é matriz ortogonal.

$$\begin{aligned} D \cdot D^T &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, D é matriz ortogonal.

6. Sejam A e B em $M_n(\mathbb{R})$, mostre que se A e B são ortogonais, então $A \cdot B$ também o é.

Solução:

Suponhamos que A e B em $M_n(\mathbb{R})$ são matrizes ortogonais, logo:

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T \stackrel{T_4}{=} (A \cdot B) \cdot (B^T \cdot A^T) \stackrel{M_2}{=} A \cdot (B \cdot B^T) \cdot A^T \stackrel{B \text{ é ortog.}}{=} A \cdot A^T \stackrel{A \text{ é ortog.}}{=} I_n.$$

7. Dado θ número real considere a matriz $T_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

(a) Dados θ e ϕ em $\mathbb{R}$, mostre que $T_\theta \cdot T_\phi = T_{\theta+\phi}$.

(b) Calcule $T_{(-\theta)}$.

(c) Mostre que para todo número θ a matriz T_θ é ortogonal.

Solução:

(a) Sejam θ e ϕ números reais, então:

$$\begin{aligned} T_\theta \cdot T_\phi &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi & -\cos \theta \sin \phi - \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta + \phi) & -\sin(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) & \cos(\theta + \phi) \end{bmatrix} = T_{\theta+\phi} \end{aligned}$$

(b) Dado $\theta \in \mathbb{R}$, então:

$$T_{-\theta} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -(-\sin \theta) \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

(c) Seja θ um número real qualquer, então:

$$\begin{aligned} T_\theta \cdot T_\theta^T &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta - \sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta - \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Logo, T_θ é matriz ortogonal.

8. Em $M_2(\mathbb{R})$ determine todas as matrizes que são simultaneamente:

(a) Simétricas e ortogonais.

(b) Anti-simétricas e ortogonais.

Solução:

(a) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ é simétrica se, e somente se,

$$A = A^T \iff \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \iff b = c.$$

Por outro lado, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ é ortogonal se, e somente se,

$$\begin{aligned} A \cdot A^T = I_2 &\iff \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & b(a+d) \\ b(a+d) & b^2 + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ b(a+d) = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Como a e b são números reais tais que $a^2 + b^2 = 1$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\begin{cases} a = \cos \theta \\ b = \sin \theta \end{cases}$ e como $b(a+d) = 0$ segue ainda que $b = 0$ ou $a = -d$.

Mas, temos também $b^2 + d^2 = 1$, então existe $\phi \in [0, 2\pi)$ tal que $\begin{cases} d = \cos \phi \\ b = \sin \phi \end{cases}$, assim como $a = -d$ segue que: $\begin{cases} a = \cos \theta = -\cos \phi \\ b = \sin \theta = \sin \phi \end{cases} \implies \phi = \pi - \theta$, pois

$$\begin{aligned} b &= \sin \phi = \sin(\pi - \theta) = \underbrace{\sin \pi}_{=0} \cos \theta - \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \sin \theta = \sin \theta \\ d &= \cos \phi = \cos(\pi - \theta) = \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cos \theta + \underbrace{\sin \pi}_{=0} \sin \theta = -\cos \theta = -a. \end{aligned}$$

Logo, as matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ que são simétricas e ortogonais simultaneamente são do tipo:

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}.$$

(b) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ é anti-simétrica, então $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}$ é ortogonal se, e somente se, $A \cdot A^T = I_2$

$$\begin{aligned} \iff \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \iff b^2 &= 1 \iff b = 1 \text{ ou } b = -1. \end{aligned}$$

Logo, as únicas matrizes reais quadradas de ordem 2 que são simultaneamente anti-simétricas e ortogonais são

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1.4 Matrizes Hermitianas e Matrizes Normais

1. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em hermitiana e anti-hermitiana:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4i & 3+2i & 7+i \\ 3+2i & 4+i & 8+2i \\ 7+i & 8+2i & 3-i \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 2-i & -3 \\ -2+i & 0 & i \\ 3 & -i & 0 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}.$$

Solução:

Vimos no exercício 2 da Seção 1.3 que:

- A é matriz real anti-simétrica, logo $A = -A^T = -\overline{A}^T = -A^*$, portanto A é anti-hermitiana.
- C é matriz complexa simétrica, logo $C = C^T$.

Porém $C \neq C^* = \overline{C}^T$, ou seja, C não é hermitiana, por exemplo

$$c_{12} = 3 + 2i \neq \overline{c_{21}} = \overline{3 + 2i} = 3 - 2i.$$

A matriz C tampouco é anti-hermitiana, pois $C = C^T \neq -C^* = -\overline{C}^T$, por exemplo

$$c_{23} = 8 + 2i \neq -\overline{c_{32}} = -\overline{8 + 2i} = -(8 + 2i) = -8 - 2i.$$

• D é matriz real simétrica, logo $D = D^T = \overline{D}^T = D^*$, portanto D é hermitiana.

• E é matriz complexa anti-simétrica, logo $E = -E^T$.

Porém, $E \neq -E^* = -\overline{E}^T$, ou seja, E não é anti-hermitiana, por exemplo,

$$-\overline{e_{21}} = -\overline{-2 + i} = -(-2 - i) = 2 + i \neq 2 - i = e_{12}.$$

A matriz E tampouco é hermitiana, pois $E \neq E^* = \overline{E}^T$, por exemplo

$$\overline{e_{12}} = \overline{2 - i} = 2 + i \neq -2 + i = e_{21}.$$

$$B^* = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2 \\ 1-i & 10 & -5i \\ 2 & 5i & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 10 & 5i \\ 2 & -5i & 8 \end{bmatrix} = B.$$

Logo, a matriz B é hermitiana.

$$\begin{aligned} F^* &= \overline{\begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} -3i & i & -3-6i \\ i & -20i & 1-\sqrt{5}i \\ 3-6i & -1-\sqrt{5}i & -\frac{1}{3}i \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} -3i & i & 3-6i \\ i & -20i & -1-\sqrt{5}i \\ -3-6i & 1-\sqrt{5}i & -\frac{1}{3}i \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3i & -i & -3+6i \\ -i & 20i & 1+\sqrt{5}i \\ 3+6i & -1+\sqrt{5}i & \frac{1}{3}i \end{bmatrix} = -F. \end{aligned}$$

Logo, a matriz F é anti-hermitiana.

2. Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$, mostre que:

- Se A é matriz real e simétrica (ou anti-simétrica), então A é matriz normal.
- Se A é matriz hermitiana (ou anti-hermitiana), então A é matriz normal.
- As matrizes $A + A^*$ e $A \cdot A^*$ são matrizes hermitianas.

Solução:

(a) Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$, se A é simétrica, então $A^T = A$, logo

$$A \cdot A^T \stackrel{A \text{ simét.}}{=} A \cdot A \stackrel{A \text{ simét.}}{=} A^T \cdot A.$$

Agora, se A é anti-simétrica, então:

$$A \cdot A^T \stackrel{A \text{ anti-sim.}}{=} A \cdot (-A) = (-A) \cdot A \stackrel{A \text{ anti-sim.}}{=} A^T \cdot A.$$

Logo, se A é matriz real simétrica ou anti-simétrica, então A é matriz normal.

(b) Seja $A \in M_n(\mathbb{C})$, se A é hermitiana $A^* = A$, então:

$$A \cdot A^* \stackrel{A \text{ herm.}}{=} A \cdot A \stackrel{A \text{ herm.}}{=} A^* \cdot A.$$

Já se A é anti-hermitiana, então $A^* = -A$ e temos:

$$A \cdot A^* \stackrel{A \text{ anti-herm.}}{=} A \cdot (-A) = (-A) \cdot A \stackrel{A \text{ anti-herm.}}{=} A^* \cdot A.$$

Logo, se A é matriz complexa hermitiana ou anti-hermitiana, então A é matriz normal complexa.

(c) Observemos que $A + \bar{A}^T = A + A^*$ e

$$(A + A^*)^* = (A + \bar{A}^T)^* = \overline{A + \bar{A}^T}^T = (\bar{A} + \overline{\bar{A}^T})^T = (\bar{A} + A^T)^T = \bar{A}^T + (A^T)^T = \bar{A}^T + A = A^* + A.$$

Portanto, $A + \bar{A}^T$ é matriz hermitiana.

$$(A \cdot A^*)^* = (A \cdot \bar{A}^T)^* = \overline{A \cdot \bar{A}^T}^T = (\bar{A} \cdot \overline{\bar{A}^T})^T = (\bar{A} \cdot A^T)^T = (A^T)^T \cdot \bar{A}^T = A \cdot \bar{A}^T = A \cdot A^*.$$

Portanto, $A \cdot \bar{A}^T$ também é matriz hermitiana

3. Classifique, se possível, as matrizes abaixo em normais e unitárias:

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$A \cdot A^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Analogamente mostramos que $A^* \cdot A = I_2$.

Portanto, a matriz A é normal e unitária.

$$\begin{aligned} B \cdot B^* &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}^* \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \overline{\begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix}}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5+i & -1-i \\ -1+i & 3+i \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5+i & -1+i \\ -1-i & 3+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix} \neq I_2. \end{aligned}$$

Logo, B não é matriz unitária.

Como $B^* \cdot B = \begin{bmatrix} 5+i & -1+i \\ -1-i & 3+i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5-i & -1+i \\ -1-i & 3-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -8+8i \\ -8-8i & 12 \end{bmatrix}$, segue que B é matriz normal complexa.

$$C \cdot C^* = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \overline{\begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix}}^T = \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5i \\ -5i & 13 \end{bmatrix} \neq I_2.$$

Mas $C^* \cdot C = \begin{bmatrix} -i & 2 \\ -i & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i & i \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \neq C \cdot C^*$, portanto C também não é normal.

1.5 Determinante

1. Seja A uma matriz quadrada de ordem 5, cujo determinante é igual a -3 .

(a) Calcule o determinante da matriz P dada por $P = 4A^{-1}A^T$.

(b) P é invertível?

(c) Calcule o determinante da matriz B obtida de A após serem realizadas as seguintes operações: $L_3 \longleftrightarrow L_2$; $L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_5$; $L_4 \longrightarrow -3L_4$.

Solução:

(a) $\det P = \det(4A^{-1}A^T) = 4^5 \det A^{-1} \det A^T = 1.024 \frac{1}{\det A} \det A = 1.024$.

(b) Como $\det P \neq 0$, segue que P é invertível.

(c) Ao efetuar a operação elementar $L_3 \longleftrightarrow L_2$ o sinal do determinante é alterado, ao efetuar a operação $L_1 \longrightarrow L_1 + 2L_5$ o determinante não se altera e ao efetuar $L_4 \longrightarrow -3L_4$ o determinante deve ser multiplicado por -3 a operação elementar, portanto

$$\det B = (-1) \times (-3) \times \det A = 3 \times (-3) = -9.$$

2. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Teorema de Laplace (usando cofatores de uma linha ou de uma coluna de A).

(b) Usando operações elementares sobre as linhas de A .

Solução:

$$\begin{aligned} \det A & \stackrel{\text{pela 2ª linha}}{=} -(-1) \begin{vmatrix} -5 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ (a) & \stackrel{\text{pela 3ª e 1ª linha}}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3 \left[4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right] \\ & = (9 + 2) + 4(5 - 6) - 3(4(8 - 3) + 5(4 - 6) + 2(1 - 4)) \\ & = 11 - 4 - 3(20 - 10 - 6) = 7 - 12 = -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 2L_1 \end{array} \sim \\
 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 15 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 15 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 5L_2 \end{array} \sim \\
 & \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 45 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{10}L_3} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 45 & 22 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 + 45L_3} \\
 & \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \\
 & \text{Como } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \text{ pelas opera\c{c}es elementares temos:}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} = (-1)(-1)\frac{1}{10}\det A \iff \det A = -\frac{10}{2} = -5.$$

3. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det A$ utilizando as opera\c{c}es elementares sobre as linhas de A ;

(b) $\det A^T$; (c) $\det A^2$; (d) $\det A^{-1}$; (e) $\det(-A)$; (f) $\det(3AA^T)$.

Solu\c{c}o\~{e}:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & 3 & -1 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 6L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 5L_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -23 & 9 & -19 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \sim \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 7 & -3 & 7 \\ 0 & -22 & 5 & -11 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + 7L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 22L_2 \end{array} \sim \\
 & \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & -83 & 165 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \rightarrow \frac{83}{25}L_3} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{58}{25} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 25 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{58}{25} \end{vmatrix} = -58$, pelas operações elementares temos:

$$-58 = (-1) \det A \iff \det A = 58.$$

(b) $\det A^T = \det A = 58$.

(c) $\det A^2 = (\det A)^2 = 58^2 = 3.364$.

(d) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{58}$.

(e) $\det(-A) = (-1)^4 58 = 58$.

(f) $\det(3AA^T) = 3^4 \det A \det A^T = 3^4 58^2 = 272.484$.

4. Calcule os seguintes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Solução:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{pela 3ª linha}} 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 9 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times (4 - 45) = 4 \times (-41) = -123$.

(b) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{pela 3ª linha}} \begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ -1 & 1 & 0 \\ -(-1) \begin{vmatrix} 1+a & c \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a & b \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = c + (1+a) + b = 1 + a + b + c$.

(c) $\begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 0 & c-3 & 2-2c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{pela 3ª linha}} \begin{vmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ -(c-3) \begin{vmatrix} c & 3 \\ 2 & c^2 \end{vmatrix} + (2-2c^2) \begin{vmatrix} c & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = (3-c)(c^3-6) + (2-2c^2)(c+8) = -c^4 + 3c^3 + 6c - 18 + 2c + 16 - 2c^3 - 16c^2 = c^4 + c^3 - 16c^2 + 8c - 2$.

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_5 \\ L_2 \leftrightarrow L_4}} \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1) \times 5 \times 2 \times (-1) \times (-4) \times (-3) = -120$.

5. Resolva as seguintes equações:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16;$$

$$(c) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}.$$

Solução:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & x+1 & 6 \\ 0 & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0 \iff x(x+1)(2x-1) = 0 \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x+1=0 \\ \text{ou} \\ 2x-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x=-1 \\ \text{ou} \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & x-2 & 3 \\ 2x+3 & x-1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 16 \iff 5 \begin{vmatrix} x-2 & 3 \\ x-1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2x+3 & 4 \end{vmatrix} = 16$$

$$\iff 5(4(x-2) - 3(x-1)) - (8 - 3(2x+3)) = 16$$

$$\iff 5(x-5) + 1 + 6x = 16 \iff 5x - 25 + 1 + 6x = 16$$

$$\iff 11x = 40 \iff x = \frac{40}{11}.$$

$$(c) \begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix} \iff x(1-x) + 3 = \begin{vmatrix} x & -6 \\ 3 & x-5 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\iff -x^2 + x + 3 = x(x-5) + 18 + (-3)(6-x)$$

$$\iff -x^2 + x + 3 = x^2 - 5x + 18 - 18 + 3x$$

$$\iff 2x^2 - 3x - 3 = 0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9+24}}{4} \iff \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{33}}{4} \\ \text{ou} \\ x = \frac{3-\sqrt{33}}{4} \end{cases}.$$

6. Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $\det(xI - A) = 0$.

Solução:

$$\det(xI - A) = 0 \iff \det \left(x \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \right) = 0 \iff \begin{vmatrix} x+2 & -2 & -3 \\ 2 & x-3 & -2 \\ 4 & -2 & x-5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x+2) \begin{vmatrix} x-3 & -2 \\ -2 & x-5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & x-5 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 2 & x-3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff (x+2)(x-3)(x-5) - 4(x+2) + 4(x-5) + 16 + 12 + 12(x-3) = 0$$

$$\iff (x+2)(x-3)(x-5) - 4x - 8 + 4x - 20 + 16 + 12 + 12x - 36 = 0$$

$$\iff (x+2)(x-3)(x-5) + 12x - 36 = 0 \iff (x-3)((x+2)(x-5) + 12) = 0$$

$$\iff (x-3)(x^2 - 3x - 10 + 12) = 0 \iff (x-3)(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$\iff \begin{matrix} x-3=0 \\ \text{ou} \\ x^2-3x+2=0 \end{matrix} \iff \begin{cases} x=3 \\ \text{ou} \\ x=1 \\ \text{ou} \\ x=2. \end{cases}$$

7. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$. Generalize o resultado para uma matriz $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ na qual $a_{ij} = 0$ sempre que $i + j \leq n$.

Solução:

$$\begin{aligned} \det A & \text{ pela 1ª linha} = (-1)^{1+4} \cdot a_{14} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = (-a_{14}) \cdot a_{23} \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \\ & = (-a_{14}) \cdot a_{23} \cdot (-a_{32} \cdot a_{41}) = a_{14} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{41}, \end{aligned}$$

ou seja, se A é matriz quadrada de ordem 4 com $a_{ij} = 0$ sempre que $i + j \leq 4$, então $\det A$ é o produto dos elementos da diagonal secundária.

Observemos que para $n = 2$ e $n = 3$ temos:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{12} \cdot a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-a_{13}) \cdot \begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ a_{31} & a_{42} \end{vmatrix} = a_{13} \cdot (-a_{22} \cdot a_{31}) = -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31},$$

respectivamente, e vemos que a menos de sinal, o determinante destas matrizes é produto dos elementos da diagonal secundária.

$$\text{Logo, de modo geral, para } n > 4 \text{ teremos: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\det A = (-1)^r \cdot a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdots a_{(n-1)2} \cdot a_{n1}.$$

Resta determinar r , se $n = 2k$, então $(-1)^{n+1} = -1$ e a posição $1n$ tem sinal $-$, logo

$$\det A = -a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}, \text{ como o elemento } a_{2(n-1)} \text{ está na posição}$$

$$1(n-1) \text{ da última matriz, então } \det A = -a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & a_{3(n-2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-2)} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-2)} \end{vmatrix} \text{ e}$$

assim sucessivamente.

Portanto, no produto $a_{2(n-1)} \cdot \dots \cdot a_{(n-1)2} \cdot a_{n1}$ temos $n-1$ fatores, sendo $\frac{n}{2}$ com sinal $+$ e $\frac{n}{2}-1$ com sinal $-$, daí que $r = \underbrace{1}_{\text{sinal de } 1n} + \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2} = k$.

Analogamente, se $n = 2k+1$, então $(-1)^{n+1} = 1$ e a posição $1n$ tem sinal $+$ e no produto $a_{2(n-1)} \cdot \dots \cdot a_{(n-1)2} \cdot a_{n1}$ temos $n-1$ fatores, sendo $\frac{n-1}{2}$ com sinal $+$ e $\frac{n-1}{2}$ com sinal $-$, daí que $r = \frac{n-1}{2} = k$.

Logo, a generalização deste é resultado é: se A é matriz quadrada de ordem n , com $a_{ij} = 0$ sempre que $i+j \leq n$ e $n > 4$, então

$$\det A = (-1)^k \cdot a_{1n} \cdot a_{2(n-1)} \cdot \dots \cdot a_{(n-1)2} \cdot a_{n1}, \quad \text{com } n = 2k \text{ ou } n = 2k+1.$$

8. Dizemos que uma matriz A quadrada de ordem n é semelhante à uma matriz B , também quadrada de ordem n , se, e somente se, existe uma matriz quadrada de ordem n invertível P tal que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$.

- (a) Mostre que se A é uma matriz semelhante a B , então B é semelhante a A .
- (b) Mostre que se A é semelhante a B e B é semelhante a C , então A é semelhante a C .
- (c) Prove que matrizes semelhantes têm o mesmo determinante.

Solução:

- (a) Se A é semelhante a B , então existe uma matriz invertível P tal que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$, isto implica que:

$$P^{-1} \cdot B \cdot P = P^{-1} \cdot (P \cdot A \cdot P^{-1}) \cdot P \iff P^{-1} \cdot B \cdot P = (P^{-1} \cdot P) \cdot A \cdot (P^{-1} \cdot P) = A.$$

Logo, $A = P^{-1} \cdot B \cdot (P^{-1})^{-1}$, ou seja, B é semelhante a A .

- (b) Suponhamos que $B = P \cdot A \cdot P^{-1}$ e $C = Q \cdot B \cdot Q^{-1}$, então

$$C = Q \cdot (P \cdot A \cdot P^{-1}) \cdot Q^{-1} = (Q \cdot P) \cdot A \cdot (P^{-1} \cdot Q^{-1}) = (Q \cdot P) \cdot A \cdot (Q \cdot P)^{-1},$$

portanto A é semelhante a C .

- (c) $\det B = \det(P \cdot A \cdot P^{-1}) = \det P \cdot \det A \cdot \det P^{-1} \stackrel{\det A^{-1} = 1/\det A}{=} \det P \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det P} = \det A$.

9. Seja A matriz em $M_n(\mathbb{K})$, mostre que se A é ortogonal ou A é unitária, então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

Solução:

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, então $A \cdot A^T = I_n$, logo

$$\det(A \cdot A^T) = \det I_n \stackrel{\det(B \cdot C) = \det B \cdot \det C}{=} \det A \cdot \det A^T = 1$$

$$\stackrel{\det A^T = \det A}{=} (\det A)^2 = 1 \iff \det A = 1 \text{ ou } \det A = -1.$$

Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é unitária, então $A \cdot A^* = I_n$, logo

$$\det(A \cdot A^T) = \det I_n \stackrel{\det(B \cdot C) = \det B \cdot \det C}{=} \det A \cdot \det A^* = 1$$

$$\stackrel{\det A^* = \det A}{=} (\det A)^2 = 1 \iff \det A = 1 \text{ ou } \det A = -1.$$

1.6 Matriz Inversa

1. Verifique se as matrizes abaixo são invertíveis, em caso afirmativo determine as inversas.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Como $\det A = 30 - 24 = 6 \neq 0$, segue que A é invertível.

Vimos que para $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ com $\det A \neq 0$ a inversa de A é dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

Logo, no nosso caso temos $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$.

Como $\det B = 2 \neq 0$, então B é invertível, vamos determinar B^{-1} efetuando operações sobre as linhas de B e de I_3 :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow \frac{1}{2}L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}.$$

Portanto, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Determine os valores de a para que a matriz seja invertível em cada um dos seguintes casos:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{bmatrix}$.

Solução:

Vimos que uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

(a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = a - 4 - (2a - 2) + 4 - 1 = -a + 1.$

Logo, $\det A \neq 0 \iff -a + 1 \neq 0 \iff a \neq 1$.

Portanto, a matriz A é invertível se, e somente se, $a \neq 1$.

$$\begin{aligned}
 \det A &= \begin{vmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{vmatrix} a+3 & 7 & 6 \\ -1 & a-5 & -6 \\ 0 & a-4 & a-4 \end{vmatrix} \\
 (b) \quad &= -(a-4) \begin{vmatrix} a+3 & 6 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} + (a-4) \begin{vmatrix} a+3 & 7 \\ -1 & a-5 \end{vmatrix} \\
 &= (a-4)(6(a+3) - 6 + (a+3)(a-5) + 7) \\
 &= (a-4)(6a + 18 + a^2 - 2a - 15 + 1) \\
 &= (a-4)(a^2 + 4a + 4) = (a-4)(a+2)^2.
 \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \det A \neq 0 \iff (a-4)(a+2)^2 \neq 0 \iff \begin{cases} a-4 \neq 0 \\ \text{ou} \\ (a+2)^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \neq 4 \\ \text{ou} \\ a \neq -2 \end{cases}.$$

Portanto, a matriz A é invertível se, e somente se, $a \neq -2$ ou $a \neq 4$.

3. Sejam A , B e C matrizes invertíveis em $M_n(\mathbb{K})$, encontre a expressão da matriz X , nos seguintes casos:

(a) $AB^T X = C$; (b) $AB + CX = I_n$; (c) $(CB)^{-1}AX = I_n$; (d) $(AB)^T XC = I_n$.

Solução:

- (a) Multiplicando a igualdade $AB^T X = C$ por A^{-1} à esquerda obtemos $B^T X = A^{-1}C$, multiplicando esta igualdade por $(B^T)^{-1}$ à esquerda obtemos $X = (B^T)^{-1}A^{-1}C$.
- (b) Somando o oposto de AB na igualdade $AB + CX = I_n$ obtemos $CX = I_n - AB$, multiplicando esta igualdade por C^{-1} à esquerda obtemos $X = C^{-1}(I_n - AB)$.
- (c) Multiplicando a igualdade $(CB)^{-1}AX = I_n$ por CB à esquerda obtemos $AX = CB$, multiplicando esta igualdade por A^{-1} à esquerda obtemos $X = A^{-1}CB$.
- (d) Multiplicando a igualdade $(AB)^T XC = I_n$ por $((AB)^T)^{-1}$ à esquerda obtemos $XC = ((AB)^T)^{-1}$, multiplicando esta igualdade por C^{-1} à direita obtemos $X = ((AB)^T)^{-1}C^{-1}$.

4. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz diagonal com $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ todos não nulos, determine A^{-1} , a inversa de A , se existir.

Solução:

Como $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ são todos não nulos, então $\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} \neq 0$, logo existe A^{-1} .

Mas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

5. Em cada caso verifique se A é invertível; determine $\text{cof}A$, a matriz co-fatora de A , e A^{-1} , a matriz inversa de A , se esta existir.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(c) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (d) A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- (a) Lembrando que a matriz cofatora de A , $\text{cof}(A) = [\text{cof}(a_{ij})]$, com $\text{cof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ e A_{ij} a matriz obtida de A retirando a i -ésima linha e j -ésima coluna, por exemplo

$$\text{cof}(a_{13}) = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 21 = 27,$$

$$\text{cof}(a_{32}) = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 18) = 19.$$

Com cálculos análogos aos acima concluímos que $\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 29 & -21 & 27 \\ 11 & 13 & 5 \\ -19 & 19 & 19 \end{bmatrix}$, como

$\det A = 152 \neq 0$, então existe A^{-1} e vimos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj}(A) = \frac{1}{\det A} \cdot (\text{cof}(A))^T.$$

Logo,

$$A^{-1} = \frac{1}{152} \begin{bmatrix} 29 & 11 & -19 \\ -21 & 13 & 19 \\ 27 & 5 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{29}{152} & \frac{11}{152} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{21}{152} & \frac{13}{152} & \frac{1}{8} \\ \frac{27}{152} & \frac{5}{152} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}.$$

(b) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

como $\det A = 1 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = (\text{cof}(A))^T = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} \frac{2}{18} & 2 & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ -\frac{4}{18} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$,

como $\det A = \frac{1}{6} \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = 6 \begin{bmatrix} \frac{2}{18} & -\frac{4}{18} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 2 & -\frac{1}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{5}{18} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{18} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 2 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 & 1 \\ -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} & -2 & 1 \\ \frac{7}{3} & -\frac{8}{3} & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(d) Com cálculos análogos aos anteriores concluímos que $\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 16 \\ 0 & -72 & 60 & 128 \\ 18 & 36 & -39 & -106 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix}$,

como $\det A = 72 \neq 0$, então existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \frac{1}{72} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & -72 & 36 & 0 \\ 12 & 60 & -39 & 0 \\ 16 & 128 & -106 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{13}{24} & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{16}{9} & -\frac{53}{36} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

6. Mostre que se A é invertível e $A \cdot B = A \cdot C$, então $B = C$.

Solução:

$$AB = AC \xrightarrow{\text{existe } A^{-1}} A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \iff (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \iff I \cdot B = I \cdot C \iff B = C.$$

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine:

(a) $\det(AB)$; (b) A^{-1} ; (c) B^{-1} ; (d) $(AB)^{-1}$.

Solução:

Sabemos que o determinante de uma matriz quadrada triangular é o produto dos elementos da diagonal principal, logo $\det A = \det B = 24$.

(a) Portanto, $\det(AB) = \det A \det B = 24^2 = 576$.

(b) Determinemos A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_4 :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{L_4 \rightarrow \frac{1}{3}L_4} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 2L_4 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 4L_4 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_4 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{4}L_3} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 3L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2 \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} L_1 \rightarrow L_1 + 5L_2$$

$$\sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}.$$

$$\text{Portanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$(c) \text{ Analogamente, obtemos } B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{25}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{25}{24} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} & \frac{17}{8} & -\frac{31}{12} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{5}{12} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(d)

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{17}{24} & \frac{31}{36} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{19}{6} & -\frac{35}{12} & \frac{55}{18} \\ -\frac{25}{24} & -\frac{67}{24} & -\frac{119}{48} & \frac{187}{72} \end{bmatrix}.$$

8. Seja A uma matriz quadrada de ordem n , mostre que:

(a) Se A satisfaz a igualdade $A^2 - 3A + I = 0$, então $A^{-1} = 3I - A$.

(b) Se A é tal que $A^{n+1} = 0$ para $n \in \mathbb{N}$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^n$.

Solução:

(a) Primeiro observemos que

$$A^2 - 3A + I = 0 \iff A(A - 3I) = -I \iff A(3I - A) = I.$$

Portanto, A é invertível e $A^{-1} = 3I - A$.

(b) Basta mostrar que $(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^n) = I$.

Mas,

$$\begin{aligned}(I - A)(I + A + A^2 + \dots + A^n) &= I + A + A^2 + \dots + A^n - A - A^2 - \dots - A^n - A^{n+1} \\ &= I - A^{n+1} \stackrel{A^{n+1}=0}{=} I.\end{aligned}$$

9. Supondo que A e B são matrizes quadradas de ordem n invertíveis, prove as seguintes igualdades:

(a) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.

(b) $(I + AB)^{-1}A = A(I + BA)^{-1}$.

(c) $(A + BB^T)^{-1}B = A^{-1}B(I + B^T A^{-1}B)^{-1}$.

Solução:

(a) $A(A + B)^{-1}B = (B^{-1}(A + B)A^{-1})^{-1} = (B^{-1}AA^{-1} + B^{-1}BA^{-1})^{-1} = (B^{-1} + A^{-1})^{-1}$.

(b) $(I + AB)^{-1}A = (A^{-1}(I + AB))^{-1} = (A^{-1} + A^{-1}AB)^{-1} = (A^{-1} + B)^{-1}$
 $= ((I + BA)A^{-1})^{-1} = A(I + BA)^{-1}$.

(c) $A^{-1}B(I + B^T A^{-1}B)^{-1} = ((I + B^T A^{-1}B)B^{-1}A)^{-1} = (B^{-1}A + B^T)^{-1}$
 $= (B^{-1}(A + BB^T))^{-1} = (A + BB^T)^{-1}B$.

10. Mostre que:

(a) Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $A^T A$ é invertível.

(b) Se A é invertível, então $\text{adj}A$ é invertível e $(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \text{adj}(A^{-1})$.

(c) Se A é uma matriz quadrada de ordem n invertível, então $\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$.

Solução:

(a) A é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$

$$\iff (\det A)^2 \neq 0 \iff \det A \cdot \det A \neq 0 \stackrel{\det A^T = \det A}{\iff} \det A^T \cdot \det A \neq 0$$

$$\stackrel{\det B \det C = \det(BC)}{\iff} \det(A^T A) \neq 0.$$

Portanto, A é invertível se, e somente se, $A^T A$ é invertível.

(b) Sabemos que se A é invertível, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}A.$$

Logo, multiplicando a igualdade acima por $(\text{adj}A)^{-1}$ à direita obtemos:

$$A^{-1}(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} I_n.$$

Agora multiplicando a última igualdade por A à esquerda obtemos:

$$(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A.$$

(c) Pelo item anterior temos $(\text{adj}A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A$, então

$$\det((\text{adj}A)^{-1}) = \det\left(\frac{1}{\det A} A\right) = \left(\frac{1}{\det A}\right)^n \det A = \frac{1}{(\det A)^n} \det A = \frac{1}{(\det A)^{n-1}}.$$

$$\text{Como } \det(\text{adj}A) = \frac{1}{\det((\text{adj}A)^{-1})} = (\det A)^{n-1}.$$

11. Determine A^{-1} , se existir, utilizando operações elementares sobre as linhas da matriz, em cada um dos seguintes casos:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; & \text{(b)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}; & \text{(c)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \\ \text{(d)} \quad A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}; & \text{(e)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Solução:

(a) Como $\det A = 12 + 2 = 14 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_2 :

$$\begin{aligned} & \begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{3}L_1} \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \\ & \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{3}{14}L_2} \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2} \\ & \sim \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{array}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Como $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2(6-10) - (12-4) + 3(20-4) = 32 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_3 :

$$\begin{aligned} & \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array}} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}} \\ & \sim \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2 - 3L_3} \\ & \sim \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

- (c) Como $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-1) + (1-0) = 1 \neq 0$, então A é invertível, vamos determinar A^{-1} efetuando operações sobre as linhas de A e de I_3 :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{-L_3 \rightarrow L_2} \\ \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3} \\ \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_3} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

$$\text{Portanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

- (d) Como $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2(2-12) - (8+12) - 4(-8-2) = -20-20+40=0$, portanto A não é invertível e não existe A^{-1} .

- (e) Como $\det A = 1 \neq 0$, pois A é matriz triangular e o determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Determinemos a inversa de A efetuando operações sobre as linhas de A e de I_4 :

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 4L_1 \end{array}} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 3L_2 \end{array}} \\ \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \xrightarrow{L_4 \rightarrow L_4 - 2L_3} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \end{array}$$

$$\text{Portanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Considere as seguintes matrizes invertíveis:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Encontre a expressão de X tal que $BAX = C$.
 (b) Determine, caso exista, a inversa da matriz X do item acima.

Solução:

- (a) Multiplicando a igualdade $BAX = C$ por $(BA)^{-1}$ à esquerda obtemos $X = (BA)^{-1}C$.
 (b) Como as matrizes A , B e C são invertíveis segue que $(BA)^{-1}$ é invertível e também $X = (BA)^{-1}C$.

Além disso, $X^{-1} = ((BA)^{-1}C)^{-1} = C^{-1}BA$.

No exercício 11 (c) temos: $C^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e com cálculos simples concluímos

que $BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Logo, $X^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$

1.7 Miscelânea

Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

- () Se a soma de matrizes $A \cdot B + B \cdot A$ está definida, então as matrizes A e B têm a mesma ordem.
- () Se $A \cdot A^T$ é uma matriz não invertível, então A não é invertível.
- () Se A é invertível de ordem n e $A \cdot B_{n \times m} = 0_{n \times m}$, então B é a matriz nula de ordem $n \times m$.
- () A soma de duas matrizes invertíveis é sempre uma matriz invertível.
- () Se A é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^4 = 0$, então $(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + A^3$.
- () Se A é matriz quadrada de ordem n , com $n \geq 2$, então $\det(2A) = 2\det A$.
- () Se A é matriz quadrada de ordem n , com $n \geq 2$, então $\det(I_n + A) = 1 + \det A$.
- () Não existe matriz quadrada real A para a qual $\det(A \cdot A^T) = -1$.
- () Se $\det(A^T \cdot A) = 4$, então $\det A = 2$.
- () $\det(A + B) = \det A + \det B$.

11. () Se A é uma matriz quadrada de ordem 4 com $\det A = -\frac{1}{2}$, então $\det(-2A^2A^T \cdot A^{-1}) = -4$.
12. () Se A é uma matriz quadrada de ordem n , com $n > 1$, então $\det(-A) = -\det A$.
13. () Toda matriz diagonal é invertível.
14. () Dadas A e B em $G_n(\mathbb{K})$, então $(I + A^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot A^{-1} = (A + B^T)^{-1}$.
15. () Se A^{100} é invertível, então $3A$ também o é.
16. () Se A é uma matriz anti-simétrica, então a matriz A^k é anti-simétrica para todo $k \in \mathbb{N}^*$.
17. () Se $A \in M_n(\mathbb{K})$, então A é a soma de uma matriz simétrica e uma matriz anti-simétrica.
18. () Toda matriz complexa simétrica é uma matriz normal.
19. () Se A é uma matriz real simétrica, então A é matriz normal.
20. () O conjugado da soma de duas matrizes simétricas é uma matriz normal.
21. () O produto de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.
22. () A soma de matrizes reais hermitianas é uma matriz simétrica.
23. () A transposta do produto de matrizes ortogonais é o produto de suas inversas.
24. () A soma de matrizes idempotentes é uma matriz idempotente.
25. () Se A e B matrizes quadradas de mesma ordem tais que $AB = A$ e $BA = B$, então A e B são matrizes idempotentes.
26. () A soma de duas matrizes hermitianas é uma matriz normal.
27. () O traço de uma matriz quadrada é igual ao traço de sua transposta.
28. () O traço de uma matriz ortogonal é igual ao traço de sua inversa.
29. () O traço de uma matriz quadrada complexa é igual ao traço de sua conjugada transposta.
30. () O conjugado do traço de uma matriz hermitiana é igual ao traço da matriz.

Solução:

1. (V) Dizer que a diferença de matrizes $AB - BA$ está definida, é equivalente a dizer que AB e BA têm a mesma ordem.

Já que estão definidos os produtos AB e BA , então o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e o número de colunas de B é igual ao número de linhas de A , ou seja, A e B são matrizes de ordens $n \times m$ e $m \times n$, respectivamente.

Consequentemente, $(AB)_{n \times n}$ e $(BA)_{m \times m}$.

Portanto, AB e BA têm a mesma ordem se, e somente se, $m = n$, ou seja, se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem.

2. (V) Se $A \cdot A^T$ é uma matriz não invertível, então

$$\det(A \cdot A^T) = 0 \stackrel{\det(BC) = \det B \det C}{\iff} \det A \cdot \det A^T = 0 \stackrel{\det A^T = \det A}{\iff} (\det A)^2 = 0 \iff \det A = 0.$$

Portanto, A não é invertível.

3. (V) Se A é invertível e $A \cdot B = 0$, então multiplicando por A^{-1} à esquerda obtemos $A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0_{n \times m} \iff B = 0_{n \times m}$, ou seja, B é a matriz nula $n \times m$.

4. (F) As matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ são invertíveis, pois $\det A = \det B = -6 \neq 0$, porém $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ que não é uma matriz invertível.

5. (V) De fato, $(I_n + A + A^2 + A^3) \cdot (I_n - A) = I_n + A + A^2 + A^3 - A - A^2 - A^3 - A^4 \stackrel{A^4=0}{=} I_n$, consequentemente, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$.

6. (F) Se A é matriz quadrada de ordem n , com $n \geq 2$, então $\det(2A) = 2^n \det A \stackrel{n \geq 2}{\geq} 2 \det A$ e a igualdade só ocorre se $\det A = 0$, logo tomando A tal que $\det A \neq 0$ a igualdade não se verifica.

7. (F) Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então $1 + \det A = 1 + 3 = 4$, porém

$$\det(I_3 + A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 18 \neq 1 + 3.$$

8. (V) De fato, se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(A \cdot A^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2 \stackrel{\det A \in \mathbb{R}}{\geq} 0$.

Portanto, não existe matriz quadrada real A tal que $\det(A \cdot A^T) = -1$.

9. (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(A \cdot A^T) = 4 \iff \det A \cdot \det A^T = 4$

$$\iff (\det A)^2 = 4 \iff \begin{cases} \det A = 2 \\ \text{ou} \\ \det A = -2 \end{cases}.$$

10. (F) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, então $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Logo, $\det(A + B) = 10 \neq 5 = 2 + 3 = \det A + \det B$.

11. (F) Pois,

$$\begin{aligned} \det(-2A^2A^T \cdot A^{-1}) &\stackrel{*}{=} (-2)^4 \cdot \det(A^2) \cdot \det A^T \cdot \det A^{-1} \\ &\stackrel{**}{=} 16 \cdot (\det A)^2 \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det A} = 16 \cdot (\det A)^2 \\ &= 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{16}{4} = 4 \neq -4. \end{aligned}$$

* $\det(kA) = k^n \det A$ e $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

** $(\det A)^k = \det A^k$, $\det A^T = \det A$ e $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

12. (F) Se A é uma matriz quadrada invertível de ordem n , com n número par, então:

$$\det(-A) = (-1)^n \det A \stackrel{n \text{ é par}}{=} \det A \stackrel{\det A \neq 0}{\neq} -\det A.$$

13. (F) Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, então A é matriz diagonal, mas $\det A = 0$ e portanto A não é invertível.

14. (V) Se estão em A e B em $G_n(\mathbb{K})$, então A e B são invertíveis e:

$$(I + A^{-1} \cdot B^T)^{-1} \cdot A^{-1} = \left(A \cdot (I + A^{-1} \cdot B^T)\right)^{-1} = (A + A \cdot A^{-1} \cdot B^T)^{-1} = (A + B^T)^{-1}.$$

15. (V) Se A^{100} é invertível, então $\det(A^{100}) \neq 0 \iff (\det A)^{100} \neq 0 \iff \det A \neq 0$.

Como $\det(3A) = 3^n \underbrace{\det A}_{\neq 0} \neq 0$, consequentemente $3A$ é matriz invertível.

16. (F) Pois, A é uma matriz quadrada anti-simétrica, se, e somente se, $A = -A^T$.

Logo, dado $k \in \mathbb{N}^*$, então $A^k = (-A^T)^k = (-1)^k (A^T)^k = (-1)^k (A^k)^T$.

Portanto, se k é ímpar temos $A^k = -(A^k)^T$ e A^k é anti-simétrica, mas se k é par temos $A^k = (A^k)^T$ e A^k é simétrica e não anti-simétrica.

17. (V) Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$ uma matriz qualquer, então podemos escrever:

$$A = \frac{1}{2}(A + A + A^T - A^T) = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{anti-simétrica}}.$$

18. (F) Se A é simétrica, então $A = A^T$, portanto $A \cdot A^* = A \cdot \bar{A}^T = A \cdot \bar{A}^T \stackrel{A^T=A}{=} A \cdot \bar{A}$, analogamente $A^* \cdot A = \bar{A} \cdot A$.

Por exemplo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}$ é simétrica, no entanto

$$A \cdot A^* = A \cdot \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1-i & -i \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1+i & 2i \\ 1+i & 4 & 1-i \\ -2i & 1+i & 3 \end{bmatrix}$$

e

$$A^* \cdot A = \bar{A} \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1-i & -i \\ 1-i & 0 & 1+i \\ -i & 1+i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1-i & -2i \\ -1+i & 4 & 1+i \\ i & 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $A \cdot A^* \neq A^* \cdot A$ e A não é matriz complexa normal.

19. (V) Se A é uma matriz real simétrica, então $A = A^T$, logo $A \cdot A^T = A \cdot A = A^T \cdot A$ e A é matriz real normal.

20. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & -i & -i \\ -i & 0 & i \\ -i & i & 0 \end{bmatrix}$ são simétricas e

$$\overline{A+B} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i \\ 1+i & 0 & 1-i \\ i & 1-i & 0 \end{bmatrix}, \text{ como vimos no item 18 esta matriz não é normal.}$$

21. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes reais simétricas, porém o elemento $ab_{12} = 8 \neq 7 = ba_{12}$, logo $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = B \cdot A \neq A \cdot B$, portanto $A \cdot B$ não é simétrica.

22. (V) Se A é matriz real hermitiana, então $A = A^* = \overline{A}^T \stackrel{A \in M_n(\mathbb{R})}{=} A^T$, portanto A é simétrica e a soma de matrizes reais simétricas é uma matriz simétrica.

De fato, se $A^T = A$ e $B^T = B$, matrizes de mesma ordem, então $(A+B)^T = A^T + B^T = A+B$.

23. (F) Sejam A e B matrizes ortogonais em $M_n(\mathbb{R})$, então $A^T = A^{-1}$ e $B^T = B^{-1}$, logo $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T = B^{-1} \cdot A^{-1}$ é o produto das inversas de B e A , porém como o produto de matrizes não é comutativo, em geral $(A \cdot B)^T \neq A^{-1} \cdot B^{-1}$.
24. (F) A matriz $I_n \in M_n(\mathbb{K})$ é idempotente, no entanto $I_n + I_n = 2I_n$ não é idempotente, pois $(2I_n)^2 = 4I_n \neq 2I_n$.
25. (V) De fato,

$$A^2 = A \cdot A = (AB) \cdot (AB) = Aa \cdot (BA) \cdot B = A \cdot B \cdot B = (AB) \cdot B = A \cdot B = A,$$

$$B^2 = B \cdot B = (BA) \cdot (BA) = B \cdot (AB) \cdot A = B \cdot A \cdot A = (BA) \cdot A = B \cdot A = B.,$$

Portanto, A e B são matrizes idempotentes.

26. (V) Sejam A e B matrizes hermitianas, então $A^* = A$ e $B^*B = B$, logo:

$$\begin{aligned} (A+B) \cdot (A+B)^* &= (A+B) \cdot (B^* + A^*) = AB^* + BB^* + AA^* + BA^* \\ &\stackrel{A^*=A \quad B^*=B}{=} AB + B^2 + A^2 + BA = (A+B)^2. \end{aligned}$$

Analogamente, $(A+B)^* \cdot (A+B) = (A+B)^2$.

Portanto, $A+B$ é uma matriz normal.

27. (V) De fato, se $A \in M_n(\mathbb{K})$, então a diagonal principal de A é igual à diagonal principal de A^T , como

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \text{tr}(A^T).$$

28. (V) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz ortogonal, então $A^{-1} = A^T$, logo $\text{tr}(A^{-1}) = \text{tr}(A^T) \stackrel{\text{item 27}}{=} \text{tr}(A)$.

29. (F) Por exemplo, tomando $A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 \\ 0 & 0 & 3-i \end{bmatrix}$, então $\text{tr}(A) = 1+i+2+i+3-i = 6+i$ e $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 3+i \end{bmatrix}$, logo $\text{tr}(A^*) = 1-i+2-i+3+i = 6-i$, portanto $\text{tr}(A) \neq \text{tr}(A^*)$.

30. (V) Seja A uma matriz hermitiana, então $\overline{\text{tr}(A)} = \text{tr}(\overline{A}) = \text{tr}(\overline{A}^T) = \text{tr}(A^*) = \text{tr}(A)$.

1.8 Matriz na Forma Escalonada e na Forma Escada

Observação: Nesta seção, dada uma matriz A vamos indicar por $p(A)$ o posto de A e $n(A)$ a nulidade de A .

1. Encontre a forma escalonada reduzida (forma escada) das seguintes matrizes:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & B &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; & C &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \\ D &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}; & E &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Solução:

•

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \rightarrow -\frac{1}{6}L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma reduzida da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

•

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_1 \rightarrow L_1 + L_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma reduzida da matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

•

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad L_1 \rightarrow \frac{1}{3}L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma reduzida da matriz $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

•

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad L_2 \rightarrow \frac{1}{5}L_2$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix} \quad L_1 \rightarrow L_1 + 3L_2 \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a forma reduzida da matriz $D = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 0 \end{bmatrix}.$

- Como $\det E = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(6+8) + 3(6-2) = -14 + 12 = -2 \neq 0$, segue que a forma reduzida de E é a matriz identidade I_3 .

2. Verifique, se possível, para quais valores de $m \in \mathbb{R}$ as matrizes abaixo são linhas equivalentes à matriz identidade I_3

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Uma matriz A quadrada de ordem n tem a forma reduzida a matriz identidade I_n se, e somente se, $\det A \neq 0$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-5 - 1) + m(2 + 5) = -12 + 7m.$$

$$\text{Logo, } \det A \neq 0 \iff -12 + 7m \neq 0 \iff m \neq \frac{12}{7}.$$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + m \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} \\ &= m(2 - m) - 2(4 - 2) + m(2m - 2) = 2m - m^2 - 4 + 2m^2 - 2m = m^2 - 4. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \det B \neq 0 \iff m^2 - 4 \neq 0 \iff m^2 \neq 4 \iff m \neq 2 \text{ e } m \neq -2.$$

3. Determine o posto e a nulidade de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

- Pelo item (a) do exercício 1 $p(A) = 3$ e $n(A) = 1$.
- A matriz B está na forma escalonada e não tem linhas nulas, logo $n(B) =$ número de linhas de $B = 2$, consequentemente $n(B) =$ número de linhas de $B - p(B) = 4 - 2 = 2$.
- $\det C = 2 \neq 0$, logo $p(C) =$ número de linhas de $C = 2$ e $n(C) = 0$.

- A forma escalona de D é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $p(D) = 2$ e $n(D) = 0$.

- A forma escalona de E é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo $p(E) = 3$ e $n(E) = 0$.

4. Dê exemplos, se possível, de matrizes satisfazendo as condições em cada um dos seguintes casos:

- (a) $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 2$; (b) $A \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 3$;
 (c) $A \in M_{2 \times 4}(\mathbb{R})$ com $p(A) = 3$; (d) $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ com $n(A) = 2$;
 (e) $A \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R})$ com $n(A) = 0$; (f) $A \in M_3(\mathbb{R})$ com $n(A) = 0$;
 (g) $A \in M_3(\mathbb{R})$ com $p(A) = 2$.

Solução:

- (a) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ é tal que $p(A) = 2$.
 (b) Dada $A_{m \times n}$ vimos que $p(A) \leq \min\{m, n\}$, logo se $A_{3 \times 2}$, então $p(A) \leq \min\{3, 2\} = 2$, portanto não há matriz $A_{3 \times 2}$ com $p(A) = 3$.
 (c) Pelo mesmo argumento do item anterior não há matriz $A_{2 \times 4}$ com $p(A) = 3$.
 (d) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ é tal que $n(A) = 2$.
 (e) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 3}$ é tal que $n(A) = 0$.
 (f) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$ é tal que $n(A) = 0$.

5. Dada a matriz $B_{m \times n}$, determine a matriz N , linha forma reduzida de B (forma escada) e a matriz invertível M , de ordem m , tal que $N = M \cdot B$, em cada um dos seguintes casos:

- (a) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 2-i & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i \end{bmatrix}_{2 \times 3}$.

Solução:

Para determinar as matrizes N e M basta efetuar operações elementares, simultaneamente, na matriz B e na matriz identidade I_m até B estar forma escalonada reduzida.

(a)

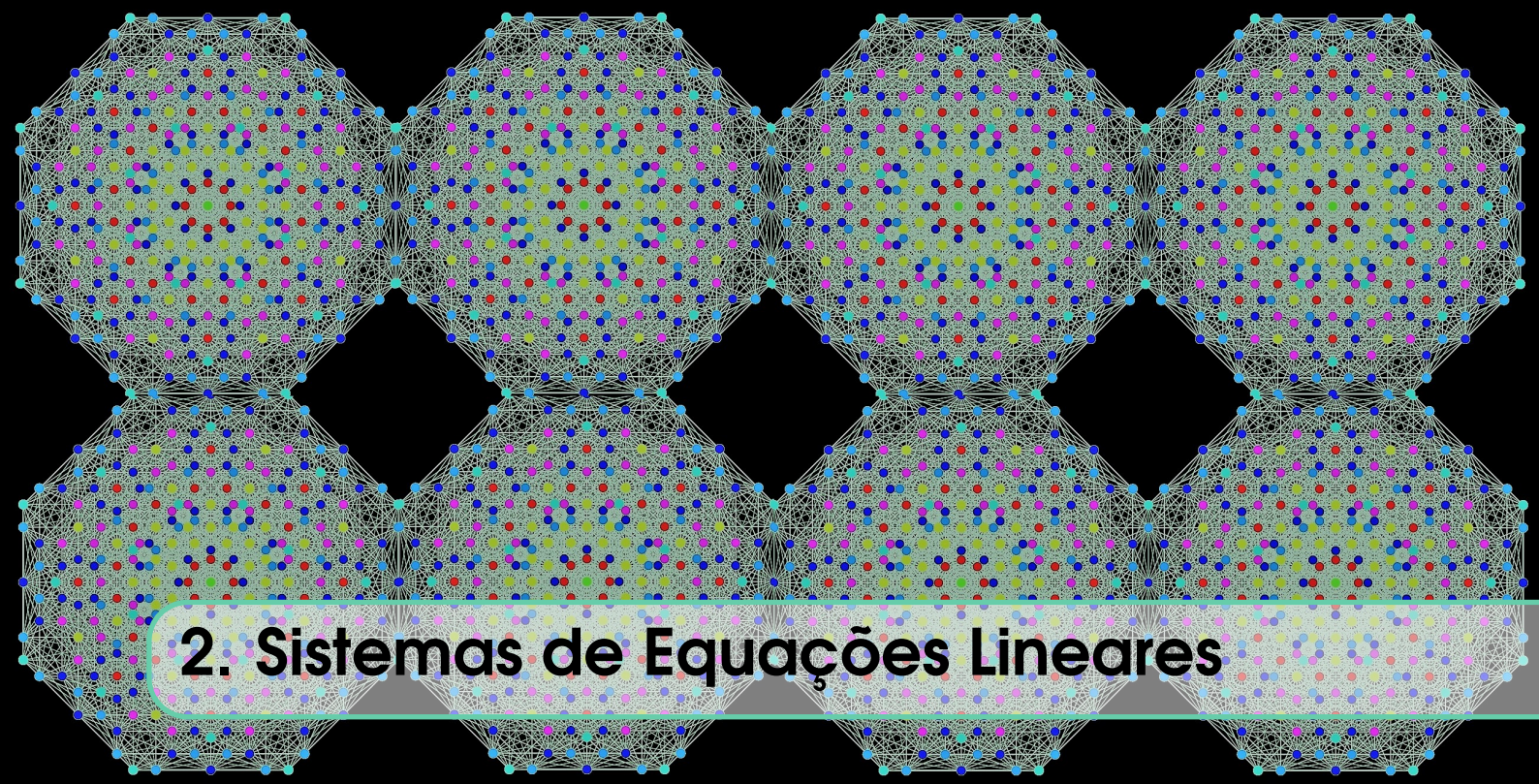
$$\begin{array}{l} \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & -1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \end{array} \\ \\ \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -2 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3 & 1 & 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow -L_2 \\ L_3 \rightarrow -\frac{1}{3}L_3 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 2 & -1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \end{array} \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \end{array} \\ \\ \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \end{array} \end{array}$$

Portanto, $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

(b)

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|cc} 2 & 2-i & 0 & 1 & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i & 0 & 1 \end{array} L_1 \longrightarrow \frac{1}{2}L_1 \\
\sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i & 0 & 1 \end{array} L_2 \longrightarrow L_2 - (1+i)L_1 \\
\sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -(5+i) & -\frac{1+i}{2} & 1 \end{array} L_2 \longrightarrow -\frac{1}{5+i}L_2 \sim \begin{array}{ccc|cc} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3+2i}{26} & 1\frac{-5+i}{26} \end{array} .
\end{array}$$

Portanto, $N = \begin{bmatrix} 1 & 1-\frac{i}{2} & 0 \\ 1+i & \frac{3+i}{2} & -5-i \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3+2i}{26} & 1\frac{-5+i}{26} \end{bmatrix}$.



2. Sistemas de Equações Lineares

2.1 Forma Matricial de um Sistema Linear

1. Escreva os seguintes sistemas na forma matricial:

$$(a) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases},$$

$$(b) \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y = -7 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 2y = 4 \\ 4x - 7y = 2 \end{cases},$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3t = 9 \\ 3x + 6y - z + 8t = 10 \end{cases}.$$

Solução:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

2.2 Classificação e Solução de Sistemas Lineares

1. Determine os valores reais de k , em cada um dos casos, para que o sistema linear dado seja compatível.

$$(a) \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 2x - y = k \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} a_1 + 2a_2 = -1 \\ -3a_1 + 4a_2 = k \\ 2a_1 - a_2 = -7 \end{cases}.$$

Solução:

(a) A matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array} \right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 + 5/4 L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 + 1/2 L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 1/2 & k+1 \end{array} \right] \quad L_3 \longrightarrow L_3 + 1/2 L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & k+6 \end{array} \right].$$

Pelo escalonamento $p(A) = 2 = p(M) \iff k+6=0 \iff k=-6$

Portanto, o sistema é compatível se, e somente se, $k=-6$, neste caso o sistema é compatível determinado.

(b) A matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & k \\ 2 & -1 & -7 \end{array} \right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & k \\ 2 & -1 & -7 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \longrightarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & k-3 \\ 0 & -5 & -5 \end{array} \right] \quad L_3 \longrightarrow L_3 + 1/2 L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & k-3 \\ 0 & 0 & (k-13)/2 \end{array} \right].$$

Pelo escalonamento $p(A) = 2 = p(M) \iff \frac{k-13}{2} = 0 \iff k-13=0 \iff k=13$

Portanto, o sistema é compatível se, e somente se, $k=13$, neste caso o sistema é compatível determinado.

2. Determine os valores de a e b que tornam o sistema linear S :
$$\begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$
 compatível e determinado.

Solução:

A matriz ampliada do sistema é $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array} \right]$, escalonando obtemos:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -7 & a \\ 1 & 1 & b \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 3 & -7 & a \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 5L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 - L_1 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 0 & -10 & a-3b \\ 0 & -2 & 5a-3b \\ 0 & 1 & a-1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_4} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & -2 & 5a-3b \\ 0 & -10 & a-3b \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 10L_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 7a-3b-2 \\ 0 & 0 & 11a-3b-10 \end{array} \right].$$

Pelo escalonamento $p(A) = 2 = p(M) \iff k+6=0 \iff k=-6$

Portanto, o sistema é compatível se, e somente se,

$$\begin{cases} 7a-3b-2 = 0 \\ 11a-3b-10 = 0 \end{cases} \implies 3b = 7a-2 \text{ e } 3b = 11a-10 \implies 7a-2 = 11a-10$$

$$\iff 4a = 8 \iff a = 2 \implies 3b = 14-2 = 12 \iff b = 4.$$

Logo, o sistema é compatível determinado se, e somente se, $a = 2$ e $b = 4$.

3. Considere o sistema linear $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$. Mostre que:

(a) se $ad - bc \neq 0$, então o sistema tem uma única solução, dada por

$$x = \frac{de - bf}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{af - ce}{ad - bc};$$

(b) se $ad - bc = 0$ e $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}$, então o sistema não tem solução.

(c) se $ad - bc = 0$ e $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$, então o sistema tem infinitas soluções.

Solução:

(a) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, logo existe $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.
 Portanto, multiplicando a igualdade $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$ por $\frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ obtemos:

$$\underbrace{\frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{I_2} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{de - bf}{ad - bc} \\ \frac{af - ce}{ad - bc} \end{bmatrix}, \text{ ou seja, } x = \frac{de - bf}{ad - bc} \text{ e } y = \frac{af - ce}{ad - bc}.$$

(b) $ad - bc = 0 \Leftrightarrow ad = bc$, supondo $c \neq 0$, então $b = \frac{ad}{c}$, logo no sistema temos:

$$\begin{cases} ax + \frac{ad}{c}y = e \\ cx + dy = f \end{cases}, \text{ multiplicando a 2ª equação por } -\frac{a}{c} \text{ obtemos o sistema equi-}$$

valente: $\begin{cases} ax + \frac{ad}{c}y = e \\ -ax + -\frac{ad}{c}y = -\frac{af}{c} \end{cases}$.

Somando a 1ª equação e a 2ª equação obtemos: $0 = e - \frac{af}{c} = \frac{ce - af}{c}$.

Como $\frac{a}{c} \neq \frac{e}{f} \Leftrightarrow af \neq ce \Leftrightarrow ce - af \neq 0$, portanto temos $0 = \frac{ce - af}{c} \neq 0$, uma contradição, consequentemente o sistema linear não tem solução.

(c) Fazendo o desenvolvimento do item anterior obtemos: $0 = e - \frac{af}{c} = \frac{ce - af}{c}$, como $\frac{a}{c} = \frac{e}{f} \Leftrightarrow af = ce \Leftrightarrow ce - af = 0$, logo temos $0 = \frac{0}{c} = 0$.

Portanto, temos $ax + \frac{ad}{c}y = e$.

- Se $a = 0$, então como estamos supondo $c \neq 0$, segue de $af = ce$ que $e = 0$, portanto temos $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$, como x e y são números reais quaisquer.
- Se $a \neq 0$, então $ax = e - \frac{ad}{c}y \Leftrightarrow x = \frac{e}{a} - \frac{d}{c}y$, com $y \in \mathbb{R}$.

Logo, o sistema linear tem infinitas soluções.

4. Dado o sistema linear $S: \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + 5z = 0 \end{cases}$.

- Verifique que $x_1 = 1, y_1 = -1$ e $z_1 = -1$ é uma solução de S ;
- Verifique que $x_2 = -2, y_1 = 2$ e $z_1 = 2$ também é uma solução de S ;
- É verdade que $x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2$ e $z = z_1 + z_2$ é uma solução de S ?
- É verdade que $3x, 3y$ e $3z$, onde x, y e z são como no item (c), é uma solução de S ?

(e) Se as respostas de (c) e (d) forem afirmativas, então responda: Por que isso ocorre?

Solução:

(a) Como $2 \times 1 + 3 \times (-1) - (-1) = 2 - 3 + 1 = 0$ e $1 - 4 \times (-1) + 5 \times (-1) = 1 + 4 - 5 = 0$, segue que $x_1 = 1$, $y_1 = -1$ e $z_1 = -1$ é uma solução de S .

(b) Como $2 \times (-2) + 3 \times 2 - 2 = -4 + 6 - 2 = 0$ e $-2 - 4 \times 2 + 5 \times 2 = -2 - 8 + 10 = 0$, segue que $x_2 = -2$, $y_1 = 2$ e $z_1 = 2$ também é uma solução de S .

(c) Como

$$2 \times (x_1 + x_2) + 3 \times (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = \underbrace{2 \times x_1 + 3 \times y_1 - z_1}_{=0} + \underbrace{2 \times x_2 + 3 \times y_2 - z_2}_{=0} = 0;$$

$$(x_1 + x_2) - 4 \times (y_1 + y_2) + 5(z_1 + z_2) = \underbrace{x_1 - 4 \times y_1 + 5z_1}_{=0} + \underbrace{x_2 - 4 \times y_2 + 5z_2}_{=0} = 0.$$

Seque que $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$ e $z = z_1 + z_2$ é uma solução de S .

(d) Como

$$2 \times (3x) + 3 \times (3y) - (3z) = 3 \times \underbrace{(2 \times x + 3 \times y - z)}_{=0} = 3 \times 0 = 0;$$

$$(3x) - 4 \times (3y) + 5(3z) = 3 \times \underbrace{(x - 4 \times y + 5z)}_{=0} = 3 \times 0 = 0.$$

Portanto, $3x$, $3y$ e $3z$, onde x , y e z são como no item (c), é uma solução de S .

(e) Isso ocorre por que em um sistema linear homogêneo, nas variáveis x , y e z , se (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) são soluções, então

$$k_1(x_1, y_1, z_1) + k_2(x_2, y_2, z_2) \quad \text{com} \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

também é solução.

2.3 Teorema do Posto

1. Considere os sistemas lineares abaixo, determine o posto e a nulidade das matrizes: **matriz dos coeficientes** e **matriz ampliada**, para os diferentes valores de $m \in \mathbb{R}$.

$$(a) S: \begin{cases} mx + 2y + mz = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 2x + my + 2z = 0 \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + mz = 0 \end{cases}.$$

Solução:

Como ambos os sistemas são homogêneos, então $p(A) = p(M)$.

$$(a) \begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} L_1 \longleftrightarrow L_2 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 2 & m \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - m/2 L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(m-4)/2 & m/2 \\ 0 & m-1 & 1 \end{bmatrix} L_3 \xrightarrow{m-4 \neq 0} L_3 + (2(m-1))/(m-4) L_2 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(m-4)/2 & m/2 \\ 0 & 0 & (m^2-4)/(m-4) \end{bmatrix}.$$

Logo,

- Se $m - 4 = 0 \iff m = 4$ e no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 3$.

- Se $m - 4 \neq 0$ e $m^2 - 4 = 0$, então $m = -4$ e no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -(m-4)/2 & m/2 \\ 0 & 0 & (m^2-4)/(m-4) \end{bmatrix} \stackrel{m=-4}{=} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 2$.

- Se $m - 4 \neq 0$ e $m^2 - 4 \neq 0$, então $\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & \underbrace{-(m-4)/2}_{\neq 0} & m/2 \\ 0 & 0 & \underbrace{(m^2-4)/(m-4)}_{\neq 0} \end{bmatrix}$,

consequentemente $p(A) = p(M) = 3$.

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_2 & \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \end{array} \sim \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 5 & m-1 \end{bmatrix} \quad L_3 \rightarrow L_3 + 5/7 L_2 & \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & (7m-12)/7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

- Se $7m - 12 = 0 \iff m = \frac{12}{7}$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 2$.

- Se $7m - 12 \neq 0 \iff m \neq \frac{12}{7}$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & m \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{(7m-12)/7}_{\neq 0} \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 3$.

$$2. \text{ Seja o sistema de equações linear } S: \begin{cases} mx + 2y + mz = 0 \\ mx + y + z = 0 \\ 2x + my + 2z = 0 \end{cases}.$$

- (a) Estude o conjunto solução do sistema S utilizando o posto e a nulidade das matrizes relacionadas para os diferentes valores de $m \in \mathbb{R}$.

- (b) Para $m = 1$, determine o conjunto solução deste sistema utilizando, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes.

Solução:

$$(a) \begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \quad L_1 \longleftrightarrow L_3 \quad \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - m/2 L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \end{array} \quad \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -(m^2-4)/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-m \end{bmatrix} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \quad \sim$$

$$\begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & -(m^2-4)/2 & 0 \end{bmatrix} \quad L_3 \rightarrow L_3 - (m^2-4)/2 L_2 \quad \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & 0 & (m^2-4)(m-1)/2 \end{bmatrix}.$$

Logo,

- Se $(m^2-4)(m-1) = 0 \iff m^2-4 = 0$ ou $m-1 = 0 \iff m = 4$ ou $m = -4$ ou $m = 1$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 2$.

- Se $(m^2-4)(m-1) \neq 0 \iff m^2-4 \neq 0$ e $m-1 \neq 0 \iff m \neq 4$, $m \neq -4$ e $m \neq 1$, então no escalonamento obtemos:

$$\begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & \underbrace{(m^2-4)(m-1)/2}_{\neq 0} \end{bmatrix},$$

consequentemente $p(A) = p(M) = 3$.

- (b) Se $m = 1$, então $p(A) = 2 < 3$, logo A não é invertível, portanto não é possível determinar o conjunto solução utilizando a inversa da matriz dos coeficientes, pois esta não existe.

$$\text{Se } m = 1, \text{ então } \begin{bmatrix} m & 2 & m \\ m & 1 & 1 \\ 2 & m & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & m & 2 \\ 0 & -1 & 1-m \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ e esta matriz}$$

$$\text{corresponde ao sistema linear: } S' : \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Portanto, se $m = 1$, então $Sol(S) = Sol(S') = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -z \text{ e } y = 0\}$.

3. Determine os valores reais de k , em cada um dos casos, para que o sistema linear dado admita solução não-trivial:

$$(a) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + kz = 0 \end{cases}.$$

Solução:

Como ambos os sistemas são homogêneos, então $p(A) = p(M)$.

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & k+2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_3 \rightarrow L_3 + (k+2)L_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -k+1 \end{bmatrix}.$$

O sistema homogêneo tem solução não trivial, se e somente se, $p(A)$ não é máximo, ou seja, se e somente se, $p(A) < 3 \iff -k+1 = 0 \iff k = 1$.

Portanto, o sistema tem solução não trivial, se e somente se, $k = 1$.

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & k \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 5 & k-2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \rightarrow L_3 + 5/7 L_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}.$$

O sistema homogêneo tem solução não trivial, se e somente se, $p(A)$ não é máximo, ou seja, se e somente se, $p(A) < 3 \iff k-2 = 0 \iff k = 2$.

Portanto, o sistema tem solução não trivial, se e somente se, $k = 2$.

$$4. \text{ Determine } k \text{ de modo que o sistema linear } \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 = 2 \\ 5x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = k \end{cases} \text{ admita solução.}$$

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{array} \right]$ logo:

$$\begin{bmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & k \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ 5 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 - 5/2 L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ 0 & -3/2 & -5k/2 \\ 0 & 1 & 2k+2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ \\ \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & -3/2 & -5k/2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \rightarrow L_3 + 3/2 L_2 \end{array} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ 0 & 1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & (k+6)/2 \end{bmatrix}.$$

Pelo desenvolvimento acima $p(A) = 2$, para que o sistema tenha solução devemos $p(A) = p(M)$ e $p(M) = 2$ se e somente se, $\frac{k+6}{2} = 0 \iff k+6 = 0 \iff k = -6$.

Portanto, o sistema tem solução, se e somente se, $k = -6$.

5. Determine os valores reais de a e b para que o sistema linear $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = b \\ x + ay + z = 0 \end{cases}$ tenha: (a) uma única solução; (b) infinitas soluções; (c) nenhuma solução:

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & 0 \end{array} \right]$, escalonando M obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 1 & a & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \sim \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & b \\ 0 & a-1 & 3 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_3 \rightarrow L_3 + (a-1)L_2 \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & b \\ 0 & 0 & 5a-2 & b(a-1) \end{array} \right].$$

(a) O sistema tem uma única solução se, e somente se,

$$p(A) = p(M) = 3 \iff 5a - 2 \neq 0 \iff a \neq \frac{2}{5}.$$

(b) O sistema tem infinitas soluções se, e somente se,

$$p(A) = p(M) < 3 \iff 5a - 2 = 0 \text{ e } b(a-1) = 0 \iff a = \frac{2}{5} \text{ e } b = 0.$$

(c) O sistema não tem solução se, e somente se,

$$p(A) \neq p(M) \iff 5a - 2 = 0 \text{ e } b(a-1) \neq 0 \iff a = \frac{2}{5} \text{ e } b \neq 0.$$

6. Determine os valores reais de k , em cada um dos casos, tais que o sistema linear dado tenha:

(i) uma única solução; (ii) infinitas soluções; (iii) nenhuma solução:

$$(a) S: \begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ 5x - 4y = 0 \\ 22x - y = k \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} x + y - kz = 0 \\ kx + y - z = 2 \end{cases},$$

$$(c) S: \begin{cases} 2x - 2y + kz = 2 \\ 2x - y + kz = 3 \\ x - ky + z = 0 \end{cases}, \quad (d) S: \begin{cases} x + kz = -2 \\ x - y - 2z = k \\ x + ky + 4z = -5 \end{cases},$$

$$(e) S: \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}, \quad (f) S: \begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases},$$

$$(g) S: \begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ 2x + ky + 8z = 3 \end{cases}, \quad (h) S: \begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}.$$

Solução:

$$(a) M = \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 22 & -1 & k \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & k+166 \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \iff k + 166 = 0 \iff k = -166$, segue que se $k \neq -166$ o sistema S tem uma única solução e se $k = -166$ o sistema S não tem solução.

$$(b) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -k & 0 \\ k & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -k & 0 \\ 0 & -k+1 & k^2-1 & 2 \end{array} \right].$$

Como $p(M) = 2$, $p(A) = 2 \iff -k+1 \neq 0$ ou $k^2-1 \neq 0 \iff k \neq 1$ e S tem três variáveis, segue que se $k \neq 1$ o sistema S tem infinitas soluções e se $k = 1$ o sistema S não tem solução.

$$(c) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & k & 2 \\ 2 & -1 & k & 3 \\ 1 & -k & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -k & 1 & 0 \\ 0 & 2k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & 2k-1 & k-2 & 3 \end{array} \right].$$

- Se $2k-2 = 0 \iff k = 1$, então

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & k & 2 \\ 2 & -1 & k & 3 \\ 1 & -k & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right],$$

portanto $p(A) = p(M) = 3$ é máximo, consequentemente S tem uma única solução.

- Se $2k-2 \neq 0 \iff k \neq 1$, então

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & k & 2 \\ 2 & -1 & k & 3 \\ 1 & -k & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & 2k-1 & k-2 & 3 \end{array} \right] \\ \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -0 & 1 & 0 \\ 0 & 2k-2 & k-2 & 2 \\ 0 & 0 & -(k-2)/2k-2 & (k-2)/k-1 \end{array} \right].$$

Se $k-2 = 0 \iff k = 2$, então $p(A) = p(M) = 2 < 3$, consequentemente S tem infinitas soluções.

Se $k-2 \neq 0 \iff k \neq 2$, então $p(A) = p(M) = 3$, consequentemente S tem uma única solução.

Portanto, S tem uma única solução se $k \neq 2$ e S tem infinitas soluções se $k = 2$.

$$(d) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & -2 \\ 1 & -1 & -2 & k \\ 1 & k & 4 & -5 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & -1 & -k-2 & k-2 \\ 0 & 0 & -k^2-3k+4 & k^2-2k-7 \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2 \iff -k^2-3k+4 = 0 \iff k = 1$ ou $k = -4$, neste caso $p(M) = 3$, pois $k^2-2k-7 = 0 \iff k = 1+2\sqrt{2}$ ou $k = 1-2\sqrt{2}$, portanto se $k = 1$ ou $k = -4$ o sistema S não tem solução.

Se $k \neq 1$ e $k \neq -4$, então $p(A) = 3 = p(M)$, como o sistema tem três variáveis segue que tem uma única solução.

$$(e) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & k & 3 \\ 1 & k & 3 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & -k^2-k+6 & -k+2 \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2 \iff -k^2-k+6 = 0 \iff k = 2$ ou $k = -3$, se $k = 2$, então $p(M) = 2$ e o sistema tem infinitas soluções, pois tem três variáveis, porém se $k = -3$, então $p(M) = 3 \neq p(A)$ e o sistema S não tem solução.

Se $k \neq 2$ e $k \neq -3$, então $p(A) = 3 = p(M)$, como o sistema tem três variáveis segue que tem uma única solução.

$$(f) M = \left[\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & -k^2+1 & -k+1 & -k+1 \\ 0 & -k+1 & k-1 & 0 \end{array} \right].$$

- Se $-k^2 + 1 = 0 \iff k^2 = 1 \iff k = 1$ ou $k = -1$, se $k = 1$, então

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

e $p(A) = p(M) = 1$, portanto S tem infinitas soluções.

Se $k = -1$,

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right]$$

e $p(A) = p(M) = 3$, portanto S tem uma única solução.

- Se $-k^2 + 1 \neq 0 \iff k^2 \neq 1 \iff k \neq 1$ e $k \neq -1$, então

$$M \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & -k^2+1 & -k+1 & -k+1 \\ 0 & -k+1 & k-1 & 0 \end{array} \right] \\ \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & -k^2+1 & -k+1 & -k+1 \\ 0 & 0 & (k^2+k-2)/(k+1) & (k-1)/(k+1) \end{array} \right],$$

logo se $k^2 + k - 2 \neq 0 \iff k \neq -2$ e $k \neq 1$, então $p(A) = p(M) = 3$ e o sistema S tem uma única solução.

Se $k = -2$ teremos $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$ e o sistema S não tem solução.

Portanto, S tem uma única solução se $k \neq -2$ e $k \neq 1$, S tem infinitas soluções se $k = 1$ e S não tem solução $k = -2$.

$$(g) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & k & 8 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 1 \\ 0 & k-4 & -2k+8 & 1 \end{array} \right].$$

Como $p(M) = 2$, $p(A) = 2 \iff k-4 \neq 0$ ou $-2k+8 \neq 0 \iff k \neq 4$ e S tem três variáveis, segue que se $k \neq 4$ o sistema S tem infinitas soluções e se $k = 4$ o sistema S não tem solução.

$$(h) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 3 & 4 & 2 & k \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 1 & -3k+2 & k-6 \\ 0 & 0 & k-3 & -k+3 \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2 \iff k-3 = 0$, neste caso $p(M) = 2$, pois $-k+3 = 0 \iff k = 3$, portanto se $k = 3$ o sistema S tem infinitas soluções, pois tem três variáveis.

Se $k \neq 3$, então $p(A) = 3 = p(M)$, portanto S tem uma única solução.

7. Determine a condição que os números reais a , b e c devem satisfazer para que, em cada um dos casos abaixo, o sistema dado tenha solução.

$$(a) S: \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases},$$

$$(c) S: \begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = b \end{cases}, \quad (d) S: \begin{cases} 3x - 7y = a \\ x + y = b \\ 5x + 3y = 5a + 2b \\ x + 2y = a + b - 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + 2y = a \\ -3x + 4y = b \\ 2x - y = c \end{cases}, \quad (f) \begin{cases} -a + 3b = x \\ 2a - b = y \\ -2a + b = z \\ 3a + b = t \end{cases}$$

Solução:

$$(a) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & -5a+2b+c \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \iff -5a + 2b + c = 0 \iff c = 5a - 2b$, segue que se $c = 5a - 2b$ o sistema S tem infinitas soluções, pois o tem três variáveis, e se $c \neq 5a - 2b$ o sistema não tem solução.

$$(b) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 3 & -2 & 2 & b \\ 1 & -5 & 8 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & -7 & 11 & -3a+b \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b+c \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \iff 2a - b + c = 0 \iff c = b - 2a$, segue que se $c = b - 2a$ o sistema S tem infinitas soluções, pois o tem três variáveis, e se $c \neq b - 2a$ o sistema não tem solução.

$$(c) M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 2 & 3 & -1 & b \\ 3 & 1 & 2 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & a \\ 0 & 7 & -9 & -2a+b \\ 0 & 0 & -1 & -a-b+c \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 3 = p(M) = 2$ e S tem três variáveis, segue que para quaisquer valores de a , b e c o sistema tem uma única solução.

$$(d) M = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 3 & -7 & a \\ 5 & 3 & 5a+2b \\ 1 & 2 & a+b-1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b \\ 0 & -10 & a-3b \\ 0 & 0 & (24a-12b)/5 \\ 0 & 0 & (11a-3b-10)/10 \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \iff 24a - 12b = 0$ e $11a - 3b - 10 = 0 \iff b = 2a$ e $b = \frac{11a-10}{3}$, mas se $b = 2a$, então $11a - 3b - 10 = 11a - 6a - 10 = 5a - 10$, logo $11a - 3b - 10 = 0 \iff 5a - 10 = 0 \iff a = 2$ e $b = 4$.

Se $a = 2$ e $b = 4$ então $p(A) = p(M) = 2$, como S tem três variáveis, segue que S tem infinitas soluções.

Se $a = 2b$ e $a \neq 2$, como então $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, portanto S não tem solução.

Se $b \neq 2a$, então $p(M) = 3 \neq p(A) = 2$, consequentemente S não tem solução.

Logo, S tem infinitas soluções se $a = 2$ e $b = 4$, caso contrário S não tem solução.

$$(e) M = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ -3 & 4 & b \\ 2 & -1 & c \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 0 & 10 & 3a+b \\ 0 & 0 & (-a+b+2c)/2 \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \iff -a + b + 2c = 0 \iff a = b + 2c$, segue que se $a = b + 2c$ o sistema S tem infinitas soluções, pois tem três variáveis, e se $a \neq b + 2c$ o sistema não tem solução.

$$(f) M = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 2 & -1 & y \\ -2 & 1 & z \\ 3 & 1 & t \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 0 & 5 & 2x+y \\ 0 & 0 & y+z \\ 0 & 0 & t-x-2y \end{array} \right].$$

Como $p(A) = 2$ e $p(M) = 2 \iff y+z=0$ e $t-x-2y=0 \iff z=-y$ e $t=x+2y$, portanto S tem uma única solução, porém se $z \neq -y$ ou $t \neq x+2y$, então $p(M) = 3 \neq p(A)$, daí que S não tem solução.

8. Seja o sistema de equações lineares $S: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2y + kz = 4 \\ x + 3y + kz = 3 \end{cases}$ com $k \in \mathbb{R}$.

Efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes para responder os seguintes itens. Justifique suas respostas!

- Determine o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema S para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$.
- Para $k = -1$, determine, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes e o conjunto solução do sistema S utilizando esta matriz.
- Para $k = 0$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss.
- Para $k = -2$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 4 \\ 1 & 3 & k & 3 \end{array} \right]$, escalonando M obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 4 \\ 1 & 3 & k & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & k+2 & 2 \\ 0 & 1 & k+1 & 2 \end{array} \right] L_2 \longleftrightarrow L_3 \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+1 & 2 \\ 0 & -2 & k+2 & 2 \end{array} \right] L_3 \longrightarrow L_3 + 2L_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & k+1 & 2 \\ 0 & 0 & 3k+4 & 6 \end{array} \right].$$

(a) Pelo desenvolvimento acima temos:

$$p(A) = p(M) = 3 \iff 3k+4 \neq 0 \iff k \neq -\frac{4}{3}, \text{ neste caso } \text{null}(A) = 0.$$

$$\text{Se } k = -\frac{4}{3} \implies p(A) = 2 \neq p(M) = 3, \text{ neste caso } \text{null}(A) = 1.$$

(b) Se $k = -1$, então

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right],$$

como as operações elementares efetuadas foram $L_2 \longleftrightarrow L_3$ e as demais do tipo $L_i \rightarrow L_i + kL_j$, segue que $\det A = -1 \neq 0$, portanto existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo método da matriz inversa a solução do sistema é

$$X = A^{-1} \cdot B \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Logo, $Sol(S) = \{(3, 2, 6)\}$.

(c) Se $k = 0$, pelo desenvolvimento ao escalonarmos M obtemos:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 4 \\ 1 & 3 & k & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{array} \right] \leftarrow 4z = 6$$

Logo, $z = \frac{3}{2}$, substituindo em $y + z = 2$ obtemos $y = \frac{1}{2}$, substituindo em $x + 2y - z = 1$, obtemos: $x_1 = \frac{3}{2}$.

Logo, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \right\}$.

(d) Se $k = -2$, prosseguimos o escalonamento acima a fim de obter a forma escada de M :

$$\begin{aligned} M &= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & k & 4 \\ 1 & 3 & k & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \rightarrow -1/2 L_3 \end{array} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \end{array} \sim \\ &\quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Portanto, $Sol(S) = \{(0, -1, -3)\}$.

9. Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 12x_3 - x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -6 \\ \quad 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ \quad \quad 2x_3 + kx_4 = 9 \end{cases},$$

com $k \in \mathbb{R}$.

Efetue operações elementares sobre as linhas das matrizes para responder os seguintes itens. Justifique suas respostas!

- (a) Determine o posto e a nulidade da matriz dos coeficientes e da matriz ampliada do sistema S para os diferentes valores de $k \in \mathbb{R}$.
- (b) Para $k = 2$, determine, se possível, a inversa da matriz dos coeficientes e o conjunto solução do sistema S utilizando esta matriz.
- (c) Para $k = 1$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss.
- (d) Para $k = 0$, determine o conjunto solução do sistema S utilizando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

Solução:

A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & 9 \end{array} \right]$, escalonando M obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & k & 9 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & k & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & 19 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 & 19 \end{array} \right].$$

- (a) Pelo desenvolvimento acima temos:

$$p(A) = p(M) = 4 \iff k+1 \neq 0 \iff k \neq -1, \text{ neste caso } \text{null}(A) = 0.$$

$$\text{Se } k = -1 \implies p(A) = 3 \neq p(M) = 4, \text{ neste caso } \text{null}(A) = 1.$$

- (b) Se $k = 2$, então

$$A = \left[\begin{array}{cccc} 3 & 5 & 12 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right],$$

como as operações elementares efetuadas foram $L_1 \leftrightarrow L_2$ e as demais do tipo $L_i \rightarrow L_i + kL_j$, segue que $\det A = -12 \neq 0$, portanto existe A^{-1} e

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 3/2 & -7/2 & -2 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1 & -1/3 & 1/3 \end{array} \right].$$

Portanto, pelo método da matriz inversa a solução do sistema é

$$X = A^{-1} \cdot B \iff \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -7/2 & -2 & 0 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & -1 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/2 \\ 7/6 \\ -11/6 \\ 19/3 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Logo, } \text{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{13}{2}, \frac{7}{6}, -\frac{11}{6}, \frac{19}{3} \right) \right\}.$$

(c) Se $k = 1$, pelo desenvolvimento ao escalonarmos M obtemos:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 19 \end{array} \right] \leftarrow 2x_4 = 19$$

Logo, $x_4 = \frac{19}{2}$, substituindo em $2x_3 - x_4 = -10$ e em $2x_2 + 2x_4 = 15$ obtemos $x_3 = -\frac{1}{4}$ e $x_2 = -2$, substituindo em $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{4}$ e $x_4 = \frac{19}{2}$ em $x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -6$, obtemos: $x_1 = \frac{13}{2}$.

$$\text{Logo, } \text{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{13}{2}, -2, -\frac{1}{4}, \frac{19}{2} \right) \right\}.$$

(d) Se $k = 0$, prosseguimos o escalonamento acima a fim de obter a forma escada de M :

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 12 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 15 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + L_4 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_4 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_4 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_2 \rightarrow \frac{1}{2} L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right] \begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_2 - 4L_3 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 \end{array} \right].$$

$$\text{Portanto, } \text{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{13}{2}, -\frac{23}{2}, \frac{9}{2}, 19 \right) \right\}.$$

2.4 Resolução de Sistemas Lineares

1. Determine a solução do sistema linear S : $\begin{cases} 2x - (1-i)y + w = 0 \\ 3y - 2iz + 5w = 0 \end{cases}$, no conjunto dos números complexos.

Solução:

A matriz ampliada de S é:

$$M = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1+i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2i & 5 & 0 \end{array} \right],$$

que já está forma escalonada, da 2ª equação obtemos: $y = \frac{2i}{3}z - \frac{5}{3}w$.

Na 1ª equação temos $x = \frac{1-i}{2}y - \frac{1}{2}w$, substituindo em y a igualdade acima obtemos:

$$x = \frac{1-i}{2} \left(\frac{2i}{3}z - \frac{5}{3}w \right) - \frac{1}{2}w = \frac{1+i}{3}z - \frac{5-5i}{6}w - \frac{1}{2}w = \frac{1+i}{3}z - \frac{8-5i}{6}w.$$

Portanto, $Sol(S) = \left\{ (x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4; x = \frac{1+i}{3}z - \frac{8-5i}{6}w \text{ e } y = \frac{2i}{3}z - \frac{5}{3}w \right\}.$

2. Resolva os seguintes sistemas utilizando o **Método de Gauss** ou o **Método de Gauss-Jordan**. Classifique-os.

$$(a) S: \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y - 2z = 0 \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 3y + 2z = 9 \\ 3x - y + 4z = 13 \end{cases}$$

$$(c) S: \begin{cases} x + 3y + 2z = 2 \\ 3x + 5y + 4z = 4 \\ 5x + 3y + 4z = -10 \end{cases}, \quad (d) S: \begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$$

$$(e) S: \begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ -x - y + 2z - 3t + w = 0 \\ x + y - 2z - w = 0 \\ z + t + w = 0 \end{cases}, \quad (f) S: \begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$$

$$(g) S: \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + z = 3 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}, \quad (h) S: \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \\ x + 7y - 7z = 5 \end{cases}$$

$$(i) S: \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}, \quad (j) S: \begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

$$(k) S: \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 3y + z - t = 4 \\ x + y - z + t = -4 \\ x - 2y + z + t = 2 \end{cases}, \quad (l) S: \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1 \\ x - y + z = 3 \\ x - y - 3z = -3 \\ 3x + 3y - 5z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$(m) S: \begin{cases} x + 2y + 3z = -6 \\ 2x - 3y - 4z = 15 \\ 3x + 4y + 5z = -8 \end{cases}, \quad (n) S: \begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ 4x + 2y + 2z = 8 \\ x - y + z = 4 \end{cases}$$

$$(o) S: \begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ x - 2y = 3 \\ 5x + 2y = 27 \end{cases}, \quad (p) S: \begin{cases} x + 4y - z = 12 \\ 3x + 8y - 2z = 4 \end{cases}$$

$$(q) S: \begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x + 5y = -8 \\ x + 3y = -5 \end{cases}, \quad (r) S: \begin{cases} 2x - y + z - t = 4 \\ 3x + 2y - z + 2t = 1 \\ 2x - y - z - t = 0 \\ 5x + 2t = 1 \end{cases}$$

$$(s) S: \begin{cases} 3x + 3y - 2z - t = 2 \\ 5x + 2y + z - 2t = 1 \\ 2x - y + 3z + t = -1 \end{cases}, \quad (t) S: \begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 0 \\ 2x + 3y - 7z + 3t = 0 \\ 4x + 13y + z + 5t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(u)} S: & \begin{cases} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 3x - y + 2z + 5t = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{cases}, & \text{(v)} S: & \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4 \end{cases} \\
 \text{(x)} S: & \begin{cases} x + 3y + 2z + 3t - 7w = 14 \\ 2x + 6y + z - 2t + 5w = -2 \\ x + 3y - z + 2w = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Solução:

Vamos resolver os sistemas lineares pelo método de Gauss.

(a) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $2z = 0 \iff z = 0$.
- Na 2ª equação temos $-3y - 3z = 0 \xrightarrow{z=0} y = 0$.
- Na 1ª equação temos $x + y + z = 0 \xrightarrow{y=z=0} x = 0$.

Logo, $Sol(S) = \{(0, 0, 0)\}$.

(b) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 3 & -1 & 4 & 13 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 18/5 & 36/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $\frac{18}{5}z = \frac{36}{5} \iff z = 2$.
- Na 2ª equação temos $-5y + 3z = 1 \xrightarrow{z=2} y = \frac{6-1}{5} = 1$.
- Na 1ª equação temos $x + 2y - z = 2 \xrightarrow{y=1, z=2} x = 2$.

Logo, $Sol(S) = \{(2, 1, 2)\}$.

(c) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & -10 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -14 \end{array} \right] \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y + 0z = -14 \iff 0 = -14$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(d) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 2 & 6 & -4 & 0 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -8 & 1 \\ 0 & -6 & 12 & -2 \end{array} \right] \sim M$.

- A 2ª equação nos fornece $-6y + 12z = -2 \iff y = 2z + \frac{1}{3}$.

- Substituindo na 1ª equação $x + 6y - 8z = 1$ obtemos

$$x = 1 - 6y + 8z = 1 - 12z - 2 + 8z = -1 - 4z.$$

$$\text{Logo, } \text{Sol}(S) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 2z + \frac{1}{3} \text{ e } x = -1 - 4z \right\}.$$

(e) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- A 4ª equação nos fornece $-3t = 0 \iff t = 0$.

- Na 3ª equação temos $z + t + w = 0 \xrightarrow{t=0} z = -w$.

- Na 2ª equação temos $y + z - 3t + 2w = 0 \xrightarrow{t=0, z=-w} y = -w$.

- Na 1ª equação temos $x + 2y - z + w = 0 \xrightarrow{y=-w, z=-w} x = 0$.

$$\text{Logo, } \text{Sol}(S) = \{ (x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5; x = 0, y = -w, z = -w \text{ e } t = 0 \}.$$

(f) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & -1 & -3 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $10z - t = -3 \iff t = 10z + 3$.

- Substituindo na 2ª equação $-y + 7z - 4t = 2$ obtemos

$$y = 7z - 4t - 2 = 7z - 40z - 12 - 2 = -33z - 14.$$

- Substituindo $t = 10z + 3$ e $y = -33z - 14$ na 1ª equação $x + y - 3z + t = 1$ obtemos

$$x = -y + 3z - t + 1 = 33z + 14 + 3z - 10z - 3 + 1 = 26z + 12.$$

$$\text{Logo, } \text{Sol}(S) = \{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = 12 + 26z; y = -14 - 33z \text{ e } t = 3 + 10z \}.$$

(g) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -10/3 & 1 & 7/3 \\ 0 & 0 & -16/5 & -34/5 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $-\frac{16}{5}z = -\frac{34}{5} \iff z = \frac{17}{8}$.
- Na 2ª equação temos

$$-\frac{10}{3}y + z = \frac{7}{3} \xrightarrow{z=17/8} y = \frac{3}{10} \times \frac{17}{8} - \frac{7}{10} = \frac{51-56}{80} = -\frac{1}{16}.$$

- Na 1ª equação temos

$$3x + 5y = 1 \iff x = \frac{1}{3} - \frac{5}{3}y \xrightarrow{y=-1/16} x = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{1}{16} = \frac{16+5}{3 \times 16} = \frac{7}{16}.$$

Logo, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{7}{16}, -\frac{1}{16}, \frac{17}{8} \right) \right\}$.

- (h) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array} \right] \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y + 0z = 11 \iff 0 = 11$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

- (i) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $-4z = 0 \iff z = 0$.
- Na 2ª equação temos $-3y - 3z = 0 \xrightarrow{z=0} y = 0$.
- Na 1ª equação temos $x + 2y + 3z = 0 \xrightarrow{y=z=0} x = 0$.

Logo, $Sol(S) = \{(0, 0, 0)\}$.

- (j) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 13/7 & 59/7 \\ 0 & 0 & 0 & 114/13 \end{array} \right] \sim M$.

Como $p(A) = 3 \neq p(M) = 4$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 4ª equação nos diz que $0x + 0y + 0z = \frac{114}{13} \iff 0 = \frac{114}{13}$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(k) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 8 \end{array} \right] \sim M$.

- A 4ª equação nos fornece $-3t = 8 \iff t = -\frac{8}{3}$.
- A 3ª equação nos fornece $-2z = -4 \iff z = 2$.
- Substituindo $t = -\frac{8}{3}$ na 2ª equação $2y - 2t = 4 \iff y = t + 2 = -\frac{8}{3} + 2 = -\frac{2}{3}$.
- Substituindo $t = -\frac{8}{3}$, $z = 2$ e $y = -\frac{2}{3}$ na 1ª equação $x + y + z + t = 0 \iff x = -y - z - t$ obtemos $x = \frac{2}{3} - 2 + \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$.

Logo, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, 2, -\frac{8}{3} \right) \right\}$.

(l) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 3/2 \end{array} \right] \sim M$.

Como $p(A) = 3 \neq p(M) = 4$, segue que o sistema linear S não tem solução, de fato:

- A 4ª equação nos fornece $\frac{2}{3}z = \frac{3}{2} \iff z = \frac{9}{4}$.
- A 3ª equação nos fornece $0x + 0y + 0z = 2 \iff 0 = 2$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(m) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & -4 & 15 \\ 3 & 4 & 5 & -8 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -6 \\ 0 & -7 & -10 & 27 \\ 0 & 0 & -8/7 & 16/7 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $\frac{-8}{7}z = \frac{16}{7} \iff z = -2$.
- Na 2ª equação temos $-7y - 10z = 27 \xrightarrow{z=-2} y = \frac{-27+20}{7} = -1$.
- Na 1ª equação temos $x + 2y + 3z = -6 \xrightarrow{y=-1, z=-2} x = -6 + 2 + 6 = 2$.

Logo, $Sol(S) = \{(2, -1, -2)\}$.

(n) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $z = 10$.
- Na 2ª equação temos $6y - 2z = -8 \xrightarrow{z=10} y = \frac{-8+20}{6} = 2$.
- Na 1ª equação temos $x - y + z = 4 \xrightarrow{y=2, z=10} x = 4 + 2 - 10 = -4$.

Logo, $Sol(S) = \{(-4, 2, 10)\}$.

(o) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 27 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 13 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- Na 2ª equação temos $y = 1$.
- Na 1ª equação temos $2x + 3y = 13 \xrightarrow{y=1} x = \frac{13-3}{2} = 5$.

Logo, $Sol(S) = \{(5, 1)\}$.

(p) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 12 \\ 3 & 8 & -2 & 4 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -4 & 1 & -32 \end{array} \right] \sim M$.

- A 2ª equação nos fornece $-4y + z = -32 \iff z = 4y - 32$.
- Substituindo na 1ª equação $x + 4y - z = 12$ obtemos

$$x = 12 - 4y + z = 12 - 4y + 4y - 32 = -20.$$

Logo, $Sol(S) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -20 \text{ e } z = 4y - 32\}$.

(q) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y = -1 \iff 0 = -1$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(r) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -5 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{array} \right] \sim M$.

- A 4ª equação nos fornece $2t = -4 \iff t = -2$.
- A 3ª equação nos diz que $-2y = -4 \iff z = 2$.
- Na 2ª equação temos $7y - 5z + 7t = -10 \xrightarrow{z=2, t=-2} y = \frac{-10 + 10 + 14}{7} = 2$.
- Na 1ª equação temos $2x - y + z - t = 4 \xrightarrow{y=z=2, t=-2} x = \frac{4 + 2 - 2 - 2}{2} = 1$.

Logo, $Sol(S) = \{(1, 2, 2, -2)\}$.

(s) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 9 & -13 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $t = 0$.
- A 2ª equação nos diz que $9y - 13z + t = 7 \xrightarrow{t=0} y = \frac{7}{9} + \frac{13}{9}z$.
- Substituindo $t = 0$ e $y = \frac{7}{9} + \frac{13}{9}z$ na 1ª equação obtemos $3x + 3y - 2z - t = 2 \implies x = \frac{2 - 3y + 2z}{3} = \frac{2}{3} - \frac{7}{9} - \frac{13}{9}z + \frac{2}{3}z = -\frac{1}{9} - \frac{7}{9}z$.

Logo, $Sol(S) = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = -\frac{1}{9} - \frac{7}{9}z, y = \frac{7}{9} + \frac{13}{9}z \text{ e } t = 0 \right\}$.

(t) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 3 & 0 \\ 4 & 13 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & -36 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $36z - 36t = 0 \iff z = t$.
- Substituindo $z = t$ na 2ª equação $-y + 3z - 5t = 0$ obtemos: $y = 3z - 5t = -2t$.
- Substituindo $z = t$ e $y = -2t$ na 1ª equação $x + 2y - 5z + 4t = 0$, obtemos: $x = -2(-2t) + 5t - 4t = 5t$.

Logo, $Sol(S) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = 5t, y = -2t \text{ e } z = t\}$.

(u) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & 4 & -13 & 3 \\ 0 & -16 & -10 & 44 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array} \right] \sim M$.

Como $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, segue que o sistema linear S não tem solução.

De fato, a 3ª equação nos diz que $0x + 0y + 0z + 0t = -\frac{3}{2} \iff 0 = -\frac{3}{2}$, uma contradição!!

Portanto, $Sol(S) = \emptyset$.

(v) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -5 & 2 & 4 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos sua forma escada: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim M$.

- A 2ª equação nos fornece $y - 2z + 2t = 1 \iff y = 1 - 2z + 2t$.

- A 1ª equação $x + z - 2t = 0 \iff x = -z + 2t$.

Logo, $Sol(S) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = -z + 2t, \text{ e } y = 1 - 2z + 2t\}$.

(x) A matriz ampliada do sistema é: $M = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -7 & 14 \\ 2 & 6 & 1 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 2 & -1 \end{array} \right]$, efetuando operações elementares nas linhas de M obtemos: $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 3 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -3 & -8 & 19 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -10 & 15 \end{array} \right] \sim M$.

- A 3ª equação nos fornece $5t - 10w = 15 \iff t = 3 + 2w$.

- Substituindo $t = 3 + 2w$ na 2ª equação $-3z - 8t + 19w = -30$, obtemos

$$z = \frac{30 - 8t + 19w}{-3} = \frac{30 - 8(3 + 2w) + 19w}{-3} = \frac{6 + 3w}{-3} = -2 - w.$$

- Substituindo $z = -2 - w$ e $t = 3 + 2w$ na 1ª equação $x + 3y + 2z + 3t - 7w = 14$ obtemos:

$$x = 14 - 3y - 2(-2 - w) - 3(3 + 2w) + 7w = 1 - 3y - w.$$

Logo, $Sol(S) = \{(x, y, z, t, w) \in \mathbb{R}^5; x = 1 - 3y - w, z = -2 - w \text{ e } t = 3 + 2w\}$.

2.5 Método da Matriz Inversa

1. Resolva os seguintes sistemas lineares utilizando o **Método da Matriz Inversa**:

$$(a) S: \begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}, \quad (b) S: \begin{cases} 2x - y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y + z = 16 \end{cases}.$$

Solução:

(a) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $Sol(S) = \{(2, 3)\}$.

(b) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}, \text{ com } \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -10 & 8 \\ -7 & -17 & 13 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 44 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $Sol(S) = \{(29, 44, 3)\}$.

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$, encontre os valores reais de λ para os quais o sistema homogêneo $S: A \cdot X_{3 \times 1} = 0_{3 \times 1}$ admite apenas a solução trivial.

Solução:

O sistema homogêneo S tem uma única solução se, e somente se, $\det A \neq 0$, observemos que

$$\det A = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda + 1) \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\iff \lambda \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) = 0 \iff \lambda = 0, \text{ ou } \lambda = 1, \text{ ou } \lambda = -1.$$

Portanto, o sistema homogêneo S têm uma única solução se, somente se, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

3. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine, se possível, a inversa de A .

(b) Utilize o item (a) para resolver a equação matricial $AX = B_k$ para $k = 1, 2, 3$.

Solução:

(a) Como $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, segue que existe A^{-1} e $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $AX = B_k \iff X = A^{-1} \cdot B_k$ para $k = 1, 2, 3$.

- Para $k = 1$ temos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- Para $k = 2$ temos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$$

- Para $k = 3$ temos:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2.6 Regra de Cramer

1. Resolva os seguintes sistemas utilizando a **Regra de Cramer**:

(a) $S: \begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases}, \quad \text{(b) } S: \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$

(c) $S: \begin{cases} 2x + 5z + 2w = 0 \\ y + z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 3y - z + w = 1 \end{cases}.$

Solução:

(a) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 19 \neq 0.$$

Pela regra de Cramer

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \end{bmatrix}, \text{ com } D_1 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 38 \text{ e } D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -19.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38/19 \\ -19/19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$

Consequentemente, $Sol(S) = \{(2, -1)\}.$

(b) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22 \neq 0.$$

Pela regra de Cramer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \end{bmatrix}$, com

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22 \text{ e } D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -66/22 \\ -22/22 \\ 44/22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

Consequentemente, $Sol(S) = \{(3, -1, 2)\}.$

(c) A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Pela regra de Cramer $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \\ D_4/D \end{bmatrix}$, com

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 15, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -18 \text{ e } D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 30.$$

Portanto, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/12 \\ -12/12 \\ -18/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ -1 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$

Consequentemente, $Sol(S) = \left\{ \left(\frac{5}{4}, -1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right) \right\}.$

2. Considere o sistema de equações lineares: $S: \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ y + 2z = -4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$, verifique se é um sistema de Cramer. Em caso afirmativo, determine o conjunto solução do sistema utilizando a regra de Cramer.

Solução:

A forma matricial do sistema linear S é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ com } D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Portanto, podemos aplicar a regra de Cramer, obtendo: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ D_3/D \end{bmatrix}$, com

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{e} \quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3.$$

$$\text{Portanto, } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -2/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Consequentemente, } \text{Sol}(S) = \left\{ \left(\frac{9}{2}, -1, -\frac{3}{2} \right) \right\}.$$

2.7 Miscelânea

Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

1. () Se o sistema de equações lineares $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$ possui apenas a solução trivial, $X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$, então S é também um sistema de Cramer.
2. () Um sistema de equações lineares homogêneo é sempre compatível.
3. () Um sistema de equações lineares $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$ possui uma única solução se, e somente se, o posto de A é igual a n .
4. () Se S é sistema de equações lineares homogêneo que possui solução diferente da solução trivial, então S é um sistema incompatível (impossível).
5. () Se o sistema linear $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$ admite as soluções X_1 e X_2 , então também admite $k_1 X_1 + k_2 X_2$ como solução, quaisquer que sejam os números reais k_1 e k_2 .
6. () Uma condição necessária e suficiente para que o sistema linear $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$ tenha somente a solução trivial é que $\det A \neq 0$.
7. () Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$, com B matriz não nula, então $X_1 + X_2$ também é solução de S .
8. () Se um sistema de equações lineares $S_0 : A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$ tem apenas a solução trivial, então todo sistema de equações lineares $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$, com $B \neq 0_{n \times 1}$, tem uma única solução.
9. () Se um sistema de equações lineares S é compatível indeterminado, então toda forma linha-reduzida da matriz ampliada de S contém alguma linha nula.
10. () Existem números reais a, b e c tais que o sistema de equações lineares:

$$S : \begin{cases} x - y - 3z = a \\ 2x + 6y + z = b \\ x + 15y + 11z = c \end{cases} \quad \text{é compatível determinado.}$$

Solução:

1. (V) Como a matriz dos coeficientes do sistema homogêneo é A_n , matriz quadrada, e este possui apenas a solução trivial, então $\det A_n \neq 0$, logo S é também um sistema de Cramer.
2. (V) Sim, pois todo sistema de equações lineares homogêneo possui pelo menos a solução trivial.
3. (V) Sabemos que um sistema de equações lineares $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$ possui uma única solução se, e somente se, a matriz A_n dos coeficientes é invertível, e isto é equivalente a dizer que $p(A_n)$ é máximo, ou seja, o posto de $p(A_n) = n$.
4. (F) Pois, todo sistema linear homogêneo é compatível.
5. (V) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = 0_{n \times 1}$, então

$$A \cdot (k_1 X_1 + k_2 X_2) = A \cdot (k_1 X_1) + A \cdot (k_2 X_2) = k_1 \underbrace{(A \cdot X_1)}_{0_{n \times 1}} + k_2 \underbrace{(A \cdot X_2)}_{0_{n \times 1}} = k_1 \cdot 0_{n \times 1} + k_2 \cdot 0_{n \times 1} = 0_{n \times 1}.$$

Portanto, $k_1 X_1 + k_2 X_2$ também é solução de S , quaisquer que sejam k_1 e k_2 .

6. (V) Pelo teorema do posto o sistema linear S tem uma única solução, a solução trivial, se, e somente se, $p(A) = p(M) = n$, mas como S é homogêneo segue que $p(A) = p(M)$ e $p(A) = n \iff A$ é invertível $\iff \det A \neq 0$.
7. (F) Se X_1 e X_2 são soluções do sistema linear dado matricialmente por: $S : A \cdot X = B$, com B matriz não nula, então

$$A \cdot (X_1 + X_2) = A \cdot X_1 + A \cdot X_2 = B + B = 2B \neq B,$$

pois B não é matriz nula.

Portanto, $X_1 + X_2$ não é solução de S .

8. (V) O sistema linear homogêneo S_0 tem apenas a solução trivial se, e somente se, $\det A_n \neq 0$ e isto é equivalente a dizer todo sistema linear $S : A_n \cdot X_{n \times 1} = B_{n \times 1}$ tem uma única solução, qualquer que seja a matriz $B_{n \times 1}$.
9. (F) O sistema linear $S : \begin{cases} x + 6y - 8z = 1 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$ tem matriz ampliada M com forma escalonada reduzida $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1/3 \end{array} \right] \sim M$, sem linhas nulas, no entanto como $p(A) = p(M) = 2 < 3 = \text{número de variáveis de } S$, segue que S tem infinitas soluções
10. (F) A matriz ampliada escalonada do sistema linear S é a seguinte:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & a \\ 0 & 8 & 7 & -2a+b \\ 0 & 0 & 0 & 3a-2b+c \end{array} \right].$$

Logo, a matriz dos coeficientes de S tem posto 2 para quaisquer valores de a , b e c , porém o sistema tem três variáveis livres, portanto pelo teorema do posto o sistema não pode ser compatível determinado.

2.8 Aplicações de Sistemas Lineares

Resolva os seguintes problemas utilizando sistemas de equações lineares e seus métodos de resolução. Em cada caso construa o sistema linear correspondente ao problema e estude o seu conjunto solução utilizando posto e nulidade das matrizes relacionadas ao sistema.

1. Uma refinaria de petróleo processa dois tipos de petróleo: com alto teor de enxofre e com baixo teor de enxofre. Cada tonelada de petróleo de baixo teor necessita de 5 minutos no setor de mistura e 4 minutos no setor de refinaria; já o petróleo com alto teor são necessários 4 minutos no setor de mistura e 2 minutos no setor de refinaria. Se o setor de mistura está disponível por 3 horas, e o setor de refinaria por 2 horas, quantas toneladas de cada tipo de combustível devem ser processadas de modo que os dois setores não fiquem ociosos?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Tempo (em minutos)	Petróleo de baixo teor	Petróleo de alto teor
Mistura	5	4
Refinaria	4	2

Indicando por x a quantidade, em toneladas, de petróleo de baixo teor de enxofre e y a quantidade, em toneladas, de petróleo de alto teor de enxofre, como a refinaria dispõe de 3 horas para mistura e 2h para refinaria temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 5x + 4y = 180 \\ 4x + 2y = 120 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 180 \\ 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devem processadas 20 T de cada tipo de combustível.

2. Um fabricante de plástico produz dois tipos de plástico: normal e especial. Para produzir uma tonelada de plástico especial são necessárias duas horas na fábrica A e 5 horas na fábrica B; já na produção de uma tonelada de plástico normal são necessárias 2 horas na fábrica A e 3 horas na fábrica B. Se a fábrica A funciona 8 horas por dia e a fábrica B funciona 15 horas por dia, quantas toneladas de cada tipo de plástico devem ser produzidas diariamente para que as duas fábricas se mantenham totalmente ocupadas?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Tempo (em horas)	Plástico normal	Plástico especial
Fábrica A	2	2
Fábrica B	3	5

Indicando por x a quantidade, em toneladas, de plástico normal e y a quantidade, em toneladas, de plástico especial, como a Fábrica A funciona 8 horas por dia e a Fábrica B funciona 15 horas por dia temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 2x + 2y = 8 \\ 3x + 5y = 15 \end{cases},$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \\ 1,5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devem ser produzidas 1,5 T de plástico normal e 2,5 T de plástico especial.

3. Um nutricionista está elaborando uma refeição que contenha os alimentos A, B e C. Cada grama do alimento A contém 2 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 4 unidades de carboidrato. Cada grama do alimento B contém 3 unidades de proteína, 2 unidades de gordura e 1 unidade de carboidrato. Já o alimento C encontramos 3 unidades de proteína, 3 unidades de gordura e 2 unidades de carboidrato. Se a refeição deve fornecer exatamente 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato, quantos gramas de cada tipo de alimento devem ser utilizados?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em unidades)	Alimento A	Alimento B	Alimento C
Proteína	2	3	3
Gordura	3	2	3
Carboidrato	4	1	2

Indicando por x a quantidade de Alimento A, y a quantidade de Alimento B e z a quantidade de Alimento C, na refeição, como a refeição deve ter 25 unidades de proteína, 24 unidades de gordura e 21 unidades de carboidrato temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 2x + 3y + 3z = 25 \\ 3x + 2y + 3z = 24 \\ 4x + y + 2z = 21 \end{cases},$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -3 & -8 & 10 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 6 & -5 \\ -3 & -8 & 10 \\ 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 \\ 24 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/5 \\ 21/5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, devem ser utilizadas 3,2 g do alimento A, 4,2 g do alimento B e 2 g do alimento C.

4. Um cooperativa produz três tipos de ração: A , B e C , utilizando farelo de soja, gordura animal e milho. Cada quilograma da ração A contém 100 g de farelo de soja e 200 g de milho e não contém gordura animal; cada quilograma da ração B contém 300 g de farelo de soja, 100 g de gordura animal e 400 g de milho; cada quilograma da ração C contém 200 g de farelo de soja, 200 g de gordura animal e 100 g de milho.

Sabendo que a disponibilidade destes produtos na cooperativa nos meses de abril, maio e junho foi dada como na tabela abaixo. Pede-se para determinar qual a quantidade de cada tipo de ração foi produzido em cada um destes meses.

Quant./ Mês (em tonelada)	Farelo de Soja	Gordura Animal	Milho
Abril	1,3	0,8	1,3
Maio	1,8	1,2	1,7
Junho	1,7	0,6	2,3

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em quilogramas)	Ração A	Ração B	Ração C
Farelo de soja	0,1	0,3	0,2
Gordura animal	0	0,1	0,2
Milho	0,2	0,4	0,1

Indicando por x a quantidade de Ração A, y a quantidade de Ração B e z a quantidade de Ração C, produzidas por mês.

Pela tabela do problema, em abril há 1,3 T de farelo de soja, 0,8 T de gordura vegetal e 1,3 T de milho, assim temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 0,1x + 0,3y + 0,2z = 1300 \\ 0,1y + 0,2z = 800 \\ 0,2x + 0,4y + 0,1z = 1300 \end{cases},$$

com as quantidades em quilograma.

Como $\begin{vmatrix} 1/10 & 3/10 & 1/5 \\ 0 & 1/10 & 1/5 \\ 1/5 & 2/5 & 1/10 \end{vmatrix} = \frac{1}{1000} \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -70 & 50 & 40 \\ 40 & -30 & -20 \\ -20 & 20 & 10 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -70 & 50 & 40 \\ 40 & -30 & -20 \\ -20 & 20 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1300 \\ 800 \\ 1300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 3000 \end{bmatrix}.$$

Portanto, no mês de abril devem ser produzidas 1 T de ração A, 2 T de ração B e 3 T de ração C.

Analogamente, concluímos que em maio serão produzidas 2 T de ração A, 2 T de ração B e 5 T de ração C e em junho serão produzidas 3 T de ração A, 4 T de ração B e 1 T de ração C.

5. Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A , B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2.300 unidades de A , 800 unidades de B e 1.500 unidades de C . Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a tabela abaixo.

Alimento	Bactéria I	Bactéria II	Bactéria III
A	2	2	4
B	1	2	0
C	1	3	1

Determine quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento.

Solução:

Designando por:

- x - quantidade de bactérias I no tubo de ensaio;
- y - quantidade de bactérias II no tubo de ensaio;
- z - quantidade de bactérias III no tubo de ensaio,

temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 2x + 2y + 4z = 2300 \\ x + 2y = 800 \\ x + 3y + z = 1500 \end{cases},$$

com as quantidades em quilograma.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 & -8 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 & -8 \\ -1 & -2 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2300 \\ 800 \\ 1500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 350 \\ 350 \end{bmatrix}.$$

Portanto, podem coexistir no tubo de ensaio 100 bactérias I, 350 bactérias II e 350 bactéria III.

6. Num torneio de triatlon as competições: nado, corrida e ciclismo foram pontuadas com pesos x , y e z , respectivamente. A tabela abaixo apresenta a pontuação dos quatro primeiros colocados em cada categoria e sua respectiva classificação final.

	Nado	Corrida	Ciclismo	Classificação Geral
Atleta 1	7,5	9	9	8,4
Atleta 2	8	7	9	8
Atleta 3	9	7,5	8,5	7,9
Atleta 4	7,5	8	8	7,8

O terceiro atleta alegou que se as classificações dos 1, 2 e 4 atletas estivessem corretas, então sua classificação estaria incorreta. Sabendo que a classificação geral foi obtida pela média ponderada

da pontuação de cada uma das competições e supondo que alegação do terceiro atleta está correta determine:

- (a) o peso de cada competição;
- (b) a classificação do terceiro atleta.

Solução:

(a) Pelos dados da tabela acima temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 7,5x + 9y + 9z = 8,4 \\ 8x + 7y + 9z = 8 \\ 7,5x + 8y + 8z = 7,8 \end{cases},$$

com x , y e z pesos de nado, corrida e ciclismo, respectivamente.

Como $\begin{vmatrix} 7,5 & 9 & 9 \\ 8 & 7 & 9 \\ 7,5 & 8 & 8 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -16/15 & 0 & 6/5 \\ 7/30 & -1/2 & 3/10 \\ 23/30 & 1/2 & -13/10 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16/15 & 0 & 6/5 \\ 7/30 & -1/2 & 3/10 \\ 23/30 & 1/2 & -13/10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8,4 \\ 8 \\ 7,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 3/10 \\ 3/10 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o peso de nado é 0,4, corrida e ciclismo têm o mesmo peso 0,3.

- (b) A nota do 3º atleta é $9 \times 0,4 + 7,5 \times 0,3 + 8,5 \times 0,3 = 8,4$, portanto ele fica empatado com o 1º atleta.
7. No meu bairro há três cadeias de supermercados: A, B e C. A tabela abaixo apresenta os preços (em reais por quilo) do produto X, do produto Y e do produto Z, nessas cadeias.

	Produto X	Produto Y	Produto Z
A	3	4	2
B	1	6	4
C	1	4	7

Comprando-se x quilos do produto X, y quilos do produto Y e z quilos do produto Z em qualquer dos supermercados pagarei R\$31,00. Determine x , y e z .

Solução:

Pelos dados da tabela acima temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 31 \\ x + 6y + 4z = 31 \\ x + 4y + 7z = 31 \end{cases},$$

com x , y e z pesos de nado, corrida e ciclismo, respectivamente.

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 31 \\ 1 & 6 & 4 & 31 \\ 1 & 4 & 7 & 31 \end{array} \right]$.

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 2 & 31 \\ 1 & 6 & 4 & 31 \\ 1 & 4 & 7 & 31 \end{array} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 31 \\ 1 & 6 & 4 & 31 \\ 3 & 4 & 2 & 31 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 31 \\ 1 & 6 & 4 & 31 \\ 3 & 4 & 2 & 31 \end{array} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 31 \\ \sim 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & -19 & -62 \end{array} \quad L_3 \longrightarrow L_3 + 4L_2 \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 31 \\ \sim 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -31 & -62 \end{array} .$$

Da 3ª equação temos $-31z = -62 \iff z = 2$, substituindo na 2ª equação $2y - 3z = 0 \iff 2y = 3z = 6 \implies y = 3$, finalmente na 1ª equação $x + 4y + 7z = 31$ obtemos $x = -4y - 7z + 31 = -12 - 14 + 31 = 5$.

Portanto, $x = 5$, $y = 3$ e $z = 2$.

8. Uma firma fábrica dois produtos: *A* e *B*. Cada um deles passa por duas máquinas: *I* e *II*. Para se fabricar uma unidade de *A* gasta-se 1h da máquina *I* e 1,5h da máquina *II*. Cada unidade de *B* gasta 3h de *I* e 2h de *II*. Quantas unidades de cada produto poderão ser fabricadas em um mês se, por motivos técnicos, *I* só funciona 300 horas e *II* só 250 horas por mês?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Tempo (em horas)	Produto A	Produto B
Máquina I	1	3
Máquina II	1,5	2

Indicando por x a quantidade de produto *A* e y a quantidade de produto *B*, produzidos por mês, como, por mês, a máquina *I* funciona 300 horas e a máquina *II* funciona 250 horas temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + 3y = 300 \\ 1,5x + 2y = 250 \end{cases} .$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{5}{2} \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/5 & 6/5 \\ 3/5 & -2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 300 \\ 250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 80 \end{bmatrix} .$$

Portanto, por mês serão fabricados 60 unidades do produto *A* e 80 unidades do produto *B*.

9. Dois metais x e y são obtidos de dois tipos de minérios *I* e *II*. De 100 kg de *I* se obtém 3 gramas de x e 5 gramas de y e de 100 kg de *II* obtém-se 4 gramas de x e 2,5 gramas de y . Quantos quilos de minério de cada tipo serão necessários para se obter 72 gramas de x e 95 gramas de y , usando-se simultaneamente os dois minérios?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em gramas)	100 kg de minério I	100 kg de minério II
Metal x	3	4
Metal y	5	2,5

Indicando por a a quantidade de minério *I* e b a quantidade de minério *II* para se obter 72 g de x e 95 g de y , temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 3a + 4b = 72 \\ 5a + 2,5b = 95 \end{cases} .$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5/2 \end{vmatrix} = -\frac{25}{2} \neq 0$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 & 8/25 \\ 2/5 & -6/25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 72 \\ 95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Portanto, são necessários 1600 kg de minério I e 600 kg de minério II para produzir 72 g do metal x e 95 g do metal y .

10. Três pessoas jogam juntas. Na primeira rodada a primeira pessoa perde para as outras duas pessoas a mesma quantia que cada uma delas tinha no início do jogo. Na 2ª rodada, a segunda pessoa perde para cada uma das outras a mesma quantia que elas tinham no final da 1ª rodada. Na terceira rodada, o 1º e o 2º jogadores ganham do 3º a mesma quantia que cada um tinha no final da segunda rodada. Neste momento, os jogadores verificaram que cada um deles possui R\$24,00. Quanto cada jogador tinha ao começar o jogo?

Solução:

Designando por:

- x - quantia que a 1ª pessoa tinha no início do jogo;
- y - quantia que a 2ª pessoa tinha no início do jogo;
- z - quantia que a 3ª pessoa tinha no início do jogo,

temos a seguinte tabela:

	1ª Pessoa	2ª Pessoa	3ª Pessoa
Início	x	y	z
Final da 1ª rodada	$x-y-z$	$2y$	$2z$
Final da 2ª rodada	$2x-2y-2z$	$2y-(x-y-z)-2z$ $=-x+3y-z$	$4z$
Final da 3ª rodada	$4x-4y-4z$	$-2x+6y-2z$	$4z-(2x-2y-2z)-(-x+3y-z)$ $=-x-y+7y$

Como ao final da 3ª rodada todas as pessoas ficam com R\$24,00 temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} -x - y + 7z = 24 \\ -2x + 6y - 2z = 24 \\ 4x - 4y - 4z = 24 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 7 & 24 \\ -2 & 6 & -2 & 24 \\ 4 & -4 & -4 & 24 \end{array} \right].$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 7 & 24 \\ -2 & 6 & -2 & 24 \\ 4 & -4 & -4 & 24 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 4L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 7 & 24 \\ 0 & 8 & -16 & -24 \\ 0 & -8 & 24 & 120 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \end{array} \quad \sim \begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 7 & 24 \\ 0 & 8 & -16 & -24 \\ 0 & 0 & 8 & 96 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos

$$8z = 96 \iff z = 12,$$

substituindo na 2ª equação

$$8y - 16z = -24 \xrightarrow{z=12} 8y = -24 + 16z = 168 \implies y = 21,$$

finalmente na 1ª equação $-x - y + 7z = 24$ obtemos

$$x = -24 - y + 7z \xrightarrow{y=21, z=12} x = -24 - 21 + 84 = 39.$$

Portanto, no início do jogo a 1ª pessoa tinha R\$39,00, a 2ª pessoa tinha R\$21,00 e 3ª pessoa tinha R\$12,00.

11. Uma indústria produz três produtos, A , B e C , utilizando dois tipos de insumos, X e Y . Para a manufatura de cada quilo de A são utilizados 1 grama do insumo X e 2 gramas do insumo Y ; para cada quilo de B , 1 grama do insumo X e 1 grama do insumo Y e, para cada quilo de C , 1 grama do insumo X e 4 gramas do insumo Y . O preço da venda do quilo de cada um dos produtos A , B e C é de R\$2,00, R\$3,00 e R\$5,00, respectivamente. Com a venda de toda a produção de A , B e C manufaturada com 1 quilo de X e 2 quilos de Y , essa indústria arrecadou R\$2500,00. Determine quantos quilos de cada um dos produtos A , B e C foram vendidos.

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Produto A	Produto B	Produto C
Insumo X	1	1	1
Insumo Y	2	1	4
Preços	2	3	5

Designando por:

- x - quantidade do produto A ;
- y - quantidade do produto B ;
- z - quantidade do produto C ,

em quilograma, assim para 1 kg do insumo X , 2 kg do insumo Y e R\$2500,00 temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + y + z = 1000 \\ 2x + y + 4z = 2000 \\ 2x + 3y + 5z = 2500 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array} \right].$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 2 & 1 & 4 & 2000 \\ 2 & 3 & 5 & 2500 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 500 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longrightarrow L_3 + L_2 \end{array} \quad \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1000 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 500 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos

$$5z = 500 \iff z = 100,$$

substituindo na 2ª equação

$$8 - y + 2z = 0 \xrightarrow{z=100} 8y = 2z = 200,$$

substituindo esses valores na 1ª equação $x + y + z = 1000$ obtemos

$$x = 1000 - y - z \xrightarrow{y=200, z=100} x = 700.$$

Portanto, foram vendidos 700 kg do produto A, 200 kg do produto B e 100 kg do produto C.

12. Uma cooperativa produz três tipos de ração, as quantidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G) em cada 10 kg de cada ração estão indicadas na tabela abaixo à esquerda, e as quantidades de proteínas (P), carboidratos (C) e gorduras (G), em toneladas, que a cooperativa tem disponível, nos meses de dezembro e janeiro, são mostradas na tabela abaixo à direita

Quantidade (em quilograma)	P	C	G
Ração 1	1	0	2
Ração 2	3	1	4
Ração 3	2	2	1

Quant./mês (em tonelada)	P	C	G
Dezembro 2019	15	10	14
Janeiro 2020	13	5	17

Nestas condições determine a quantidade de cada tipo de ração é produzido em cada mês.

Solução:

Designando por:

- x - quantidade da ração 1;
- y - quantidade da ração 2;
- z - quantidade da ração 3,

em 10 quilograma, assim pela tabela acima à direita, em dezembro, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + 3y + 2z = 15000 \\ y + 2z = 10000 \\ 2x + 4y + z = 14000 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & 10000 \\ 2 & 4 & 1 & 14000 \end{array} \right].$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & 10000 \\ 2 & 4 & 1 & 14000 \end{array} \quad L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & 10000 \\ 0 & -2 & -3 & -16000 \end{array} \quad L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \quad \sim \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 15000 \\ 0 & 1 & 2 & 10000 \\ 0 & 0 & 1 & 4000 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $z = 4000$, substituindo na 2ª equação $y + 2z = 10000 \xrightarrow{z=4000} 8y = 10000 - 2z = 2000$, substituindo esses valores na 1ª equação $x + 3y + 2z = 15000$ obtemos

$$x = 15000 - 3y - 2z \xrightarrow{y=200, z=4000} x = 4000.$$

Portanto, em dezembro foram produzidos 10 T da ração 1, 20 T da ração 2 e 40 T da ração 3.

Analogamente, concluímos que, em janeiro foram produzidos 20 T da ração 1, 30 T da ração 2 e 10 T da ração 3.

13. Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada 10 m^2 140g de nitrato, 190g de fosfato e 205g de potássio. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

- (i) Cada quilograma do adubo I custa R\$5,00 e contém 10g de nitrato, 10g de fosfato e 100g de potássio.
- (ii) Cada quilograma do adubo II custa R\$15,00 e contém 10g de nitrato, 100g de fosfato e 30g de potássio.
- (iii) Cada quilograma do adubo III custa R\$5,00 e contém 50g de nitrato, 20g de fosfato e 20g de potássio.
- (iv) Cada quilograma do adubo IV custa R\$10,00 e contém 20g de nitrato, 40g de fosfato e 35g de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado se estamos dispostos a gastar R\$40,00 a cada 10 m^2 com a adubação?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Adubo I	Adubo II	Adubo III	Adubo IV
Preços	5	15	5	10
Nitrato	10	10	50	20
Fósforo	10	100	20	40
Potássio	100	30	20	35

Designando por:

- x - quantidade do adubo I;
- y - quantidade do adubo II;
- z - quantidade do adubo III;
- t - quantidade do adubo IV,

para 10 m^2 , como para essa área se dispõe a gastar R\$40,00 e são necessárias 140g de nitrato, 190g de fosfato e 205g de potássio temos assim o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 5x + 15y + 5z + 10t = 40 \\ 10x + 10y + 50z + 20t = 140 \\ 10x + 100y + 20z + 40t = 190 \\ 100x + 30y + 20z + 35t = 205 \end{cases}$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 15 & 5 & 10 & 40 \\ 10 & 10 & 50 & 20 & 140 \\ 10 & 100 & 20 & 40 & 190 \\ 100 & 30 & 20 & 35 & 205 \end{array} \right].$

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 15 & 5 & 10 & 40 \\ 10 & 10 & 50 & 20 & 140 & L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1 \\ 10 & 100 & 20 & 40 & 190 & L_3 \longrightarrow L_3 - 2L_1 \\ 100 & 30 & 20 & 35 & 205 & L_4 \longrightarrow L_4 - 20L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 5 & 15 & 5 & 10 & 40 \\
 0 & -20 & 40 & 0 & 60 \\
 0 & 70 & 10 & 20 & 110 \\
 0 & -270 & -80 & -165 & -595
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 L_3 \longrightarrow L_3 + 7/2L_1 \\
 L_4 \longrightarrow L_4 - 27/2L_2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 5 & 15 & 5 & 10 & 40 \\
 0 & -20 & 40 & 0 & 60 \\
 0 & 0 & 150 & 20 & 320 \\
 0 & 0 & -620 & -165 & -1405
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 L_4 \longrightarrow L_4 + 62/35L_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
 5 & 15 & 5 & 10 & 40 \\
 0 & -20 & 40 & 0 & 60 \\
 0 & 0 & 150 & 20 & 320 \\
 0 & 0 & 0 & -247/3 & -247/3
 \end{array}
 .$$

Da 4ª equação temos $t = 1$, substituindo na 3ª equação $150z + 20t = 320 \implies z = 2$ substituindo $t = 1$ e $z = 2$ na 2ª equação $-20y + 40z = 60$ obtemos $20y = 20 \implies y = 1$, substituindo esses valores na 1ª equação obtemos:

$$5x + 15y + 5z + 10t = 40 \iff x = 8 - 3y - z - 2t \stackrel{y=1, z=2, t=1}{\implies} x = 1.$$

Portanto, para fazer a mistura para 10 m^2 devem ser utilizados 1 kg do adubo I, 1 kg do adubo II, 2 kg do adubo I, e 1 kg do adubo IV.

14. Uma florista oferece três tamanhos de arranjos de flores com rosas, margaridas e crisântemos.
- (i) Cada arranjo pequeno contém uma rosa, três margaridas e três crisântemos.
 - (ii) Cada arranjo médio contém duas rosas, quatro margaridas e seis crisântemos.
 - (iii) Cada arranjo grande contém quatro rosas, oito margaridas e seis crisântemos.

Um dia a florista notou que havia usado um total de 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos ao preparar as encomendas desses três tipos de arranjos. Quantos arranjos de cada tipo ela fez neste dia?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Arranjo P	Arranjo M	Arranjo G
Rosa	1	2	4
Margarida	3	4	8
Crisântemo	3	6	6

Designando por:

- x - quantidade de arranjos P;
- y - quantidade de arranjos M;
- z - quantidade de arranjos G,

se neste dia a florista tinha 24 rosas, 50 margaridas e 48 crisântemos, então temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + 2y + 4z = 24 \\ 3x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 6y + 6z = 48 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 3 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 6 & 6 & 48 \end{array} \right]$.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 3 & 4 & 8 & 50 \\ 3 & 6 & 6 & 48 \end{array} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1, L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1} \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 24 \\ 0 & -2 & -4 & -22 \\ 0 & 0 & -6 & -24 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $-6z = -24 \iff z = 4$, substituindo na 2ª equação $-2y - 4z = -22 \xrightarrow{z=4} 8y = 11 - 2z = 3$, substituindo esses valores na 1ª equação $x + 2y + 4z = 24$ obtemos

$$x = 24 - 2y - 4z \xrightarrow{y=3, z=4} x = 2.$$

Portanto, foram feitos 2 arranjos pequenos, 3 arranjos médios e 4 arranjos grandes.

15. Um comerciante vende três tipos distintos de caixas com chocolates. A caixa tipo-I contém 2 unidades do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e 4 unidades do chocolate amargo. A caixa tipo-II contém 1 unidade do chocolate branco, 2 unidades do chocolate ao leite e não contém chocolate amargo. A caixa tipo-III contém 1 unidade do chocolate branco, 3 unidades do chocolate ao leite e a unidade do chocolate amargo; $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que o comerciante dispõe de 50 unidades do chocolate branco, 100 unidades do chocolate ao leite e 60 unidades do chocolate amargo. Quantas caixas de cada tipo o comerciante consegue preparar utilizando todos os chocolates?

Verifique também se é possível, para quais valores de $a \in \mathbb{R}$, que o sistema correspondente ao problema do comerciante seja um sistema de Cramer.

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

	Caixa Tipo I	Caixa Tipo II	Caixa Tipo III
Chocolate branco	2	1	1
Chocolate ao leite	2	2	3
Chocolate amargo	4	0	a

Designando por:

- x - quantidade de caixas tipo I;
- y - quantidade de caixas tipo II;
- z - quantidade de caixas tipo III,

como o comerciante dispõe de 50 unidades do chocolate branco, 100 unidades do chocolate ao leite e 60 unidades do chocolate amargo, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 2x + y + z = 50 \\ 2x + 2y + 3z = 100 \\ 4x + az = 60 \end{cases}.$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & 2 & 3 & 100 \\ 4 & 0 & a & 60 \end{array} \right]$.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & 2 & 3 & 100 \\ 4 & 0 & a & 60 \end{array} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1, L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1} \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & -2 & a-2 & -40 \end{array} \quad L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \\ 0 & 0 & a+2 & 60 \end{array}$$

Logo, temos as seguintes situações:

- Se $a + 2 \neq 0 \iff a \neq -4$, então $p(A) = p(M) = 3$ e o sistema linear S tem uma única solução, e é um sistema de Cramer.

Neste caso, da 3ª equação temos $(a + 2)z = 60 \iff z = \frac{60}{a + 2}$, substituindo na 2ª equação

$$y + 2z = 50 \iff y = 50 - 2z = 50 - \frac{120}{a + 2} = \frac{50a - 20}{a + 2},$$

substituindo esses valores na 1ª equação $2x + y + z = 50$ obtemos

$$2x = 50 - y - z = 50 - \frac{50a - 20}{a + 2} - \frac{60}{a + 2} = \frac{60}{a + 2} \iff x = \frac{30}{a + 2}.$$

Observemos que x e y são quantidades não negativas, portanto $50a - 20 \geq 0 \iff a \geq \frac{2}{5}$, e como

$$x = \frac{30}{a + 2}, \quad y = \frac{50a - 20}{a + 2} \quad \text{e} \quad z = \frac{60}{a + 2} \quad \text{são inteiros,}$$

as possibilidades de quantidades de caixas são as seguintes:

- * $a = 1 \implies x = 10 \quad y = 10 \quad \text{e} \quad z = 20;$
- * $a = 4 \implies x = 5 \quad y = 0 \quad \text{e} \quad z = 10;$
- * $a = 13 \implies x = 2 \quad y = 42 \quad \text{e} \quad z = 4;$
- * $a = 28 \implies x = 1 \quad y = 46 \quad \text{e} \quad z = 2,$

- Se $a + 2 = 0 \iff a = -2$, então $p(A) = 2 \neq p(M) = 3$, portanto o sistema linear S não tem solução.

16. Um comerciante de café vende três misturas de grãos.

- (i) Um pacote com a mistura da casa contém 300g de café colombiano e 200g de café tostado tipo francês.
- (ii) Um pacote com a mistura especial contém 200g de café colombiano, 200g de café queniano e 100g de café tostado tipo francês.
- (iii) Um pacote com a mistura gourmet contém 100g de café colombiano, 200g de café queniano e 200g de café tostado tipo francês.

O comerciante tem 30kg de café colombiano, 15kg de café queniano e 25kg de café tostado tipo francês. Se ele deseja utilizar todos os grãos de café, quantos pacotes de cada mistura ele deve preparar?

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em gramas)	Mistura da Casa	Mistura Especial	Mistura Gourmet
Café colombiano	300	200	100
Café francês	200	100	200
Café queniano	0	200	200

Designando por:

- x - quantidade de mistura da casa;
- y - quantidade de mistura especial;
- z - quantidade de mistura gourmet,

em pacotes, como o comerciante dispõe de 30kg de café colombiano, 15kg de café queniano e 25kg de café tipo francês, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 300x + 200y + 100z = 30000 \\ 200x + 100y + 200z = 15000 \\ 200y + 200z = 25000 \end{cases}$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{ccc|c} 300 & 200 & 100 & 30000 \\ 200 & 100 & 200 & 15000 \\ 0 & 200 & 200 & 25000 \end{array} \right]$.

$$\begin{array}{ccc|c} 300 & 200 & 100 & 30000 \\ 200 & 100 & 200 & 15000 \\ 0 & 200 & 200 & 25000 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_1 \rightarrow \frac{1}{100}L_1 \\ L_2 \rightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_1 \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & -100/3 & 400/3 & 5000 \\ 0 & 200 & 200 & 25000 \end{array} \quad \begin{array}{l} L_2 \rightarrow \frac{3}{100}L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 6L_2 \end{array} \quad \sim \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 300 \\ 0 & -1 & 4 & 150 \\ 0 & 0 & 1000 & 45000 \end{array}$$

Da 3ª equação temos $100z = 45000 \iff z = 45$, substituindo na 2ª equação

$$8 - y + 4z = 150 \iff y = 4z - 150 \xrightarrow{z=45} 8y = 180 - 150 = 30,$$

substituindo esses valores na 1ª equação $3x + 2y + z = 30$ obtemos

$$3x = 300 - 2y - z \xrightarrow{y=30, z=45} 3x = 195 \iff x = 65.$$

Portanto, podem ser preparados 65 pacotes de mistura da casa, 30 pacotes de mistura especial e 45 pacotes de mistura gourmet.

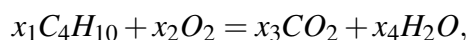
17. Faça o balanceamento da equação química para a seguinte reação:



“Queima do gás butano na presença de oxigênio para formar dióxido de carbono e água.”

Solução:

Devemos encontrar números x_1, x_2, x_3, x_4 tais que a quantidade de átomos seja a mesma em ambos os lados da equação:



ou seja,

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 & = & x_3 \quad \text{equação do carbono} \\ 10x_1 & = & 2x_4 \quad \text{equação do hidrogênio} \\ 2x_2 & = & 2x_3 + x_4 \quad \text{equação do oxigênio,} \end{array}$$

assim temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} 4x_1 & - & x_3 & = & 0 \\ 10x_1 & & & - & 2x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

A matriz ampliada de S é $M = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right]$.

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \quad L_2 \longrightarrow L_2 - 5/2 L_1$$

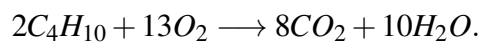
$$\sim \begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array} \quad L_2 \longleftrightarrow L_3 \quad \sim \begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & -2 & 0 \end{array}.$$

Da 3ª equação temos $\frac{5}{2}x_3 - 2x_4 = 0 \iff x_3 = \frac{4}{5}x_4$, na 2ª equação temos

$$2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \iff 2x_2 = 2x_3 + x_4 = 2\frac{4}{5}x_4 + x_4 = \frac{13}{5}x_4 \iff x_2 = \frac{13}{10}x_4.$$

Na 1ª equação temos: $4x_1 - x_3 = 0 \iff 4x_1 = x_3 = \frac{4}{5}x_4 \implies x_1 = \frac{1}{5}x_4$.

Assim, como $x_1 = \frac{1}{5}x_4$, $x_2 = \frac{13}{10}x_4$, $x_3 = \frac{4}{5}x_4$, x_4 são inteiros não negativos, não todos nulos, devemos ter x_4 múltiplo de 10, por exemplo para $x_4 = 10$ obtemos $x_1 = 2$, $x_2 = 13$ e $x_3 = 8$ e temos a seguinte equação balanceada:



18. Um aluno de *Álgebra Linear A* precisa distribuir o seu tempo no mês a fim de revisar os seguintes assuntos: matrizes, sistemas de equações lineares e métodos de solução. Para revisar matrizes ele necessita na semana de 1h na segunda-feira, 3h na quarta-feira e 3h na sexta-feira. Para revisar sistemas de equações lineares ele necessita na semana de 2h na segunda-feira, 4h na quarta-feira e 6h na sexta-feira; e, para revisar métodos de solução ele necessita na semana de 4h na segunda-feira, 8h na quarta-feira e 6h na sexta-feira. Organizando o seu tempo de estudo, ele constatou que tem disponível no mês: 24 horas/mês na segunda-feira, 50 horas/mês na quarta-feira e 48 horas/mês na sexta-feira. Agora ele deseja saber quantas vezes no mês ele conseguirá revisar cada assunto.

Solução:

Pelos dados do problema temos a seguinte tabela:

Quantidade (em horas)	Segunda-feira	Quarta-feira	Sexta-feira
Matrizes	1	3	3
Sistemas Lineares	2	4	6
Métodos de solução	4	8	6

Designando por:

- x - tempo dedicado ao estudo de matrizes;
- y - tempo dedicado ao estudo de sistemas lineares;
- z - tempo dedicado ao estudo de métodos de solução,

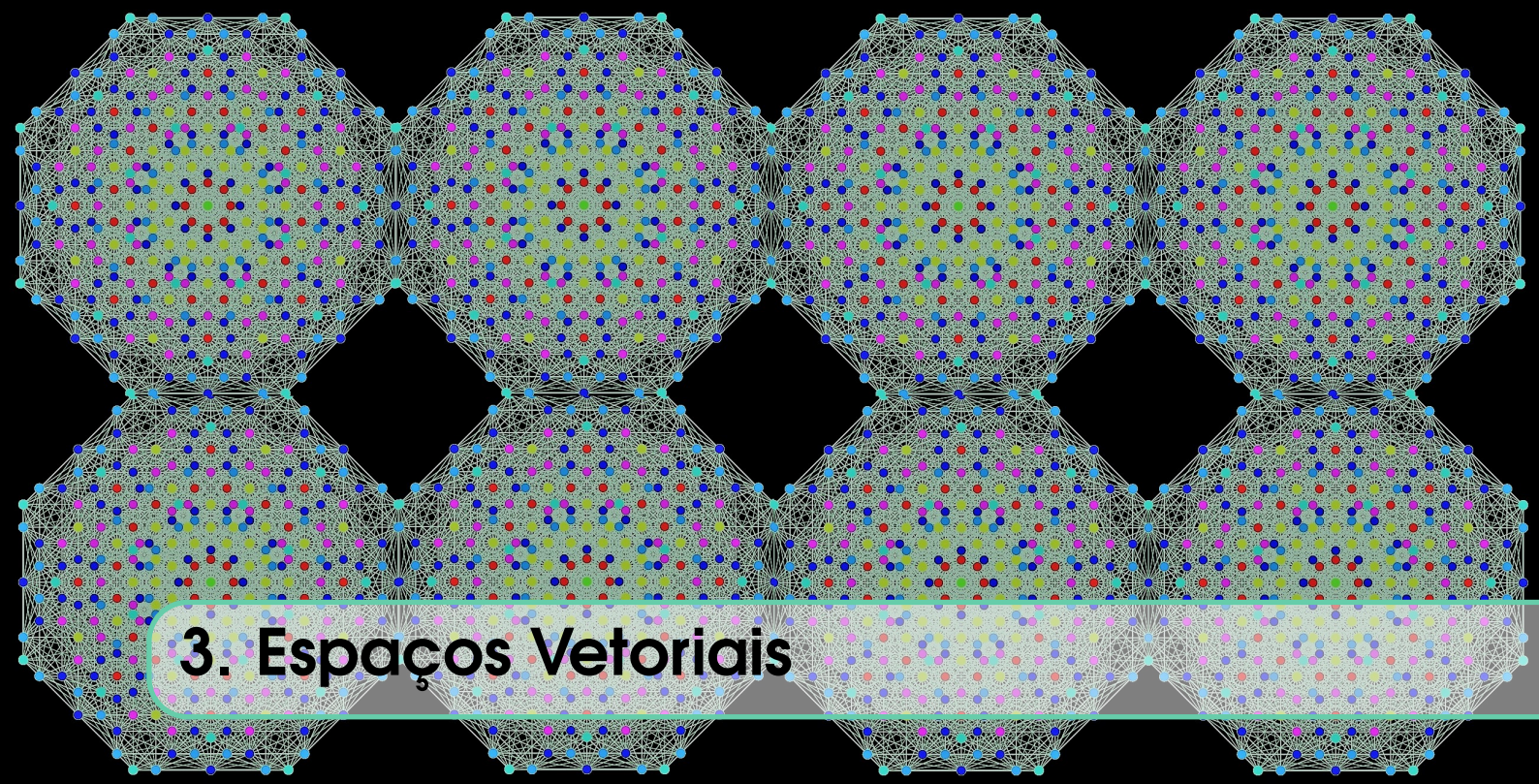
em horas, como o aluno dispõe de 24 horas/mês na segunda-feira, 50 horas/mês na quarta-feira e 48 horas/mês na sexta-feira, temos o seguinte sistema linear:

$$S: \begin{cases} x + 2y + 4z = 24 \\ 3x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 6y + 6z = 48 \end{cases}.$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$, existe A^{-1} e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$, podemos aplicar o método da matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & -1/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 24 \\ 50 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Portanto, por vez, o aluno deve dedicar 2 horas para revisar matrizes, 3 horas para revisar sistemas lineares e 4 horas para revisar métodos de solução.



3. Espaços Vetoriais

3.1 Espaços Vetoriais

1. Considere em $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ com as operações:

- Adição: $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2)$ para quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.
- Multiplicação por escalar: $\lambda \odot (x, y) = (x^\lambda, \lambda \cdot y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Exiba o elemento neutro da adição $\oplus$.
- Exiba o simétrico aditivo de (x, y) .
- Exiba a unidade da operação $\odot$.
- Mostre que V é um espaço vetorial real.

Solução:

- A adição está bem definida, pois dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em V , então $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$, consequentemente

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2) \in V, \text{ pois } \underbrace{x_1}_{>0} \cdot \underbrace{x_2}_{>0} > 0.$$

Além disso, dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3) em V temos:

- $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2) = (x_2 \cdot x_1, y_2 + y_1) = (x_2, y_2) \oplus (x_1, y_1)$, portanto $\oplus$ é comutativa.
- $((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) \oplus (x_3, y_3) = (x_2 \cdot x_1, y_2 + y_1) \oplus (x_3, y_3) = (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, y_1 + y_2 + y_3) = (x_1, y_1) \oplus (x_2 \cdot x_3, y_2 + y_3) = (x_1, y_1) \oplus ((x_2, y_2) \oplus (x_3, y_3))$, portanto $\oplus$ é associativa.

Agora vejamos se existe $0_V = (a, b) \in V$ tal que

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x, y) \text{ para todo } (x, y) \in V.$$

$$(x, y) \oplus (a, b) = (x, y), \forall (x, y) \in V \iff (x \cdot a, y + b) = (x, y), \forall (x, y) \in V$$

$$\iff \begin{cases} x \cdot a = x \\ y + b = y \end{cases}, \forall (x, y) \in V \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$$

Portanto, o elemento neutro da operação $\oplus$ é $0_V = (1, 0)$.

(b) Dado um elemento arbitrário $(x, y) \in V$, vejamos agora se existe $(a, b) \in V$ tal que

$$(x, y) \oplus (a, b) = 0_V = (1, 0).$$

$$(x, y) \oplus (a, b) = (1, 0) \iff (x \cdot a, y + b) = (1, 0) \iff \begin{cases} x \cdot a = 1 \\ y + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \stackrel{x > 0}{=} x^{-1} = \frac{1}{x} \\ b = -y \end{cases}$$

Logo, o elemento simétrico de (x, y) , com $x > 0$, em relação à $\oplus$ é $\left(\frac{1}{x}, -y\right)$.

Consequentemente, as propriedades A_1, A_2, A_3 e A_4 se verificam para $\oplus$ em V

A multiplicação por escalar está bem definida, pois dados (x, y) em V , então $x > 0$, logo

$$\alpha \odot (x, y) \oplus (x_2, y_2) = (x^\alpha, \alpha \cdot y) \in V, \text{ pois } x^\alpha \stackrel{x > 0}{>} 0.$$

Assim, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em V temos:

$$\begin{aligned} \bullet \alpha \odot ((x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2)) &= \alpha \odot (x_1 \cdot x_2, y_1 + y_2) = ((x_1 \cdot x_2)^\alpha, \alpha \cdot (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha, \alpha \cdot y_1 + \alpha \cdot y_2) = (x_1^\alpha, \alpha \cdot y_1) \oplus (x_2^\alpha, \alpha \cdot y_2). \end{aligned}$$

Vale a condição M_1 .

$$\begin{aligned} \bullet (\alpha + \beta) \odot (x_1, y_1) &= (x_1^{\alpha+\beta}, (\alpha + \beta) \cdot y_1) = (x_1^\alpha \cdot x_1^\beta, \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_1) = (x_1^\alpha, \alpha \cdot y_1) \oplus \\ &= (x_1^\beta, \alpha \cdot y_1) = (\alpha \odot (x_1, y_1)) \oplus (\beta \odot (x_1, y_1)). \end{aligned}$$

Vale a condição M_2 .

$$\begin{aligned} \bullet (\alpha \cdot \beta) \odot (x_1, y_1) &= (x_1^{\alpha \cdot \beta}, (\alpha \cdot \beta) \cdot y_1) = ((x_1^\beta)^\alpha, \alpha \cdot (\beta \cdot y_1)) = \alpha \odot (x_1^\beta, \beta \cdot y_1) = \\ &= \alpha \odot (\beta \odot (x_1, y_1)). \end{aligned}$$

Vale a condição M_3 .

• A unidade de $\odot$, se existir, é um número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\alpha \odot (x, y) = (x, y), \forall (x, y) \in V.$$

$$\alpha \odot (x, y) = (x, y), \forall (x, y) \in V \iff (x^\alpha, \alpha \cdot y) = (x, y), \forall (x, y) \in V$$

$$\iff \begin{cases} x^\alpha = x \\ \alpha \cdot y = y \end{cases}, \forall (x, y) \in V \iff \alpha = 1.$$

(c) Portanto, a unidade da operação $\odot$ é o número 1 e a condição M_4 se verifica.

(d) Assim, deste desenvolvimento concluímos que V com a adição $\oplus$ e a multiplicação por escalar $\odot$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

2. Verifique se $M_2(\mathbb{R})$, com as operações: soma usual e a multiplicação por escalar dada por

$$\lambda \odot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{bmatrix},$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução:

Já sabemos $M_2(\mathbb{R})$ com a soma usual verifica as propriedades A_1, A_2, A_3 e A_4 da definição de espaços vetoriais.

Porém, a propriedade M_2 da multiplicação por escalar não se verifica, de fato, tomando $\alpha = 1$ e $\beta = 3$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \odot A &= (1 + 3) \odot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 4 \odot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 16 \end{bmatrix} \\ &\neq 1 \odot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 3 \odot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, $M_2(\mathbb{R})$ com a soma usual e a multiplicação por escalar $\odot$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3. Verifique se $\mathbb{C}^2$ com a multiplicação por escalar usual e a adição dada por:

$$(a_1 + b_1i, c_1 + d_1i) \oplus (a_2 + b_2i, c_2 + d_2i) = (a_1 + a_2 + (b_1 + 2b_2)i, (c_1 - c_2) + (d_1 + d_2)i)$$

para quaisquer $(a_1 + b_1i, c_1 + d_1i), (a_2 + b_2i, c_2 + d_2i)$ em $\mathbb{C}^2$ é:

(a) Sobre $\mathbb{R}$.

(b) Sobre $\mathbb{C}$.

Solução:

A soma $\oplus$ não é comutativa em $\mathbb{C}^2$, de fato, tomando $u = (1 + i, 2 - 3i)$ e $v = (5 + 4i, -3 + i)$ temos:

$$\begin{aligned} u \oplus v &= (1 + i, 2 - 3i) \oplus (5 + 4i, -3 + i) \\ &= (1 + 5 + (1 + 2 \times 4)i, (2 - (-3)) + (-3 + 1)) = (6 + 9i, 5 - 2i) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} v \oplus u &= (5 + 4i, -3 + i) \oplus (1 + i, 2 - 3i) \\ &= (5 + 1 + (4 + 2 \times 1)i, (-3 - 2) + (1 + (-3))i) = (6 + 6i, -5 - 2i). \end{aligned}$$

Claramente, $u \oplus v \neq v \oplus u$.

Portanto, $\mathbb{C}^2$ com a multiplicação por escalar usual e a adição $\oplus$ não é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, nem sobre $\mathbb{C}$.

4. Considere a e b números reais com $a < b$, o conjunto das funções reais contínuas com domínio $[a, b]$ é indicado por:

$$\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ é uma função contínua}\}.$$

Mostre que com $\mathcal{C}([a, b])$, com as operações adição $((f + g)(x) = f(x) + g(x))$ e multiplicação por um escalar $((\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x))$ definidas em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Solução:

Primeiro observemos que:

- Da definição de soma de funções e multiplicação por escalar, segue que se $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f + g \in \mathcal{C}([a, b])$ e $\alpha \cdot f \in \mathcal{C}([a, b])$.
- $\mathcal{C}([a, b])$ é um subconjunto de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, o conjunto de todas funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.

Como as propriedades A_1, A_2, A_3 e A_4, M_1, M_2, M_3 e M_4 valem em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$, a função nula definida em $[a, b]$ está em $\mathcal{C}([a, b])$ e se $f \in \mathcal{C}([a, b])$, então $-f \in \mathcal{C}([a, b])$, segue que estas propriedades valem em $\mathcal{C}([a, b])$.

Portanto, $\mathcal{C}([a, b])$ com a soma e a multiplicação por escalar usuais é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

3.2 Subespaços Vetoriais

1. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

- (a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y \leq 0\}$; (b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
 (c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$; (d) $W = \mathbb{Q}^3$; com $\mathbb{Q}$ conjunto dos números racionais;
 (e) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \cdot y = 1\}$; (f) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = x^2\}$.

Solução:

(a) $(1, -1, 3) \in W$, pois $-1 < 0$, porém $(-1) \cdot (1, -1, 3) = (-1, 1, -3) \notin W$, já que $1 > 0$.

Logo, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(b) $(1, 0, 0) \in W$, pois $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \leq 1$, porém $2 \cdot (1, 0, 0) = (2, 0, 0) \notin W$, já que $2^2 + 0^2 + 0^2 = 4 > 1$.

Logo, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(c) $(0, 0, 0) \in W$, logo $W \neq \emptyset$.

(i) Dados $u = (x_1, y_1, z_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2)$ em W , então $u = (x_1, y_1, 0)$ e $v = (x_2, y_2, 0)$

Logo, $u + v = (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0) \in W$.

(ii) Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\alpha \cdot (x_1, y_1, 0) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot 0) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, 0) \in W.$$

Portanto, de (i) e (ii) concluímos que U é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(d) $(1, 1, 1) \in W$, porém $\sqrt{2} \cdot (1, 1, 1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin W$, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Logo, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(e) $(0, 0, 0) \notin W$, pois $0 \cdot 0 = 0 \neq 1$.

Logo, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(f) $(1, 1, 0), (-2, 4, 0) \in W$, pois $1^2 = 1$ e $(-2)^2 = 4$, mas
 $(1, 1, 0) + (-2, 4, 0) = (-1, 5, 0) \notin W$, pois $(-1)^2 = 1 \neq 5$.

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

2. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com $n \geq 2$.

- (a) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \text{ é simétrica}\}$; (b) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \text{ é invertível}\}$;
 (c) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \text{ não é invertível}\}$; (d) $W = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A^2 = A\}$;
 (e) $W_B = \{A \in M_n(\mathbb{R}); A \cdot B = 0_{n \times n}\}$, com $B \in M_n(\mathbb{R})$ matriz não nula e fixa;
 (f) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} = a_{22} \text{ e } a_{21} = -a_{12} \right\}$.

Solução:

(a) Como $0_{n \times n}^T = 0_{n \times n}$, então $W \neq \emptyset$.

(i) Sejam A e B estão em W , então $(A + B)^T \stackrel{T_2}{=} A^T + B^T = A + B$.

Portanto, $A + B \in W$.

(ii) Sejam A em W e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $(\alpha \cdot A)^T \stackrel{T_3}{=} \alpha \cdot A^T = \alpha \cdot A$.

Assim, $\alpha \cdot A \in W$.

De (i) e (ii) segue que W é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(b) $0_n \notin W$, pois $\det_n = 0$ e 0_n não é invertível, consequentemente W não é subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ não são invertíveis, pois $\det A = \det B = 0$, porém $A + B = I_2 \notin M_2(\mathbb{R})$, pois I_2 é invertível.

Portanto, W não é subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(d) $I_n \in W$, porém $2 \cdot I_n \notin W$, pois $(2 \cdot I_n)^2 = 4 \cdot I_n \neq 2 \cdot I_n$.

Portanto, W não é subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(e) Como $0_{n \times n} \cdot B = 0_{n \times n}$, então $W \neq \emptyset$.

(i) Sejam A e C em W , então $A \cdot B = 0_{n \times n}$ e $C \cdot B = 0_{n \times n}$, logo

$$(A + C) \cdot B = A \cdot B + C \cdot B = 0_{n \times n} + 0_{n \times n} = 0_{n \times n}.$$

Portanto, $A + C \in W$.

(ii) Sejam A em W e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $(\alpha \cdot A) \cdot B = \alpha \cdot (A \cdot B) = \alpha \cdot 0_{n \times n} = 0_{n \times n}$.

Assim, $\alpha \cdot A \in W$.

De (i) e (ii) segue que W é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

(f) $0_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W$, pois $0 = 0$ e $0 = -0$, portanto $W \neq \emptyset$.

(i) Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ em W , então $a_{11} = a_{22}$ e $a_{21} = -a_{12}$ e $b_{11} = b_{22}$ e $b_{21} = -b_{12}$, logo $A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$, com $a_{11} + b_{11} = a_{22} + b_{22}$ e $a_{21} + b_{21} = (-a_{12}) + (-b_{12}) = -(a_{12} + b_{12})$.

Portanto, $A + C \in W$.

(ii) Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ em W e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $a_{11} = a_{22}$ e $a_{21} = -a_{12}$.

Logo, $\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{bmatrix}$ com $\alpha \cdot a_{11} = \alpha \cdot a_{22}$ e $\alpha \cdot a_{21} = \alpha \cdot (-a_{12}) = -(\alpha \cdot a_{12})$.

Assim, $\alpha \cdot A \in W$.

De (i) e (ii) segue que W é um subespaço de $M_n(\mathbb{R})$.

3. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + t \geq 0\}$;

(b) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = z \text{ e } t = 3z\}$;

(c) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + 2t = 0\}$;

(d) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; t \notin \mathbb{Q}\}$.

Solução:

- (a) $(-1, 2, -3, 5) \in W$, pois $-1 = 5 = 4 > 0$, porém $(-1) \cdot (-1, 2, -3, 5) = (1, -2, 3, -5) \notin W$, já que $1 + (-5) = -4 < 0$.

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

- (b) $(0, 0, 0, 0) \in W$, pois $0 = 0$ e $3 \times 0 = 0$, logo $W \neq \emptyset$.

- (i) Dados $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ em W , então $u = (z_1, y_1, z_1, 3z_1)$ e $v = (z_2, y_2, z_2, 3z_2)$

Logo,

$$\begin{aligned} u + v &= (z_1, y_1, z_1, 3z_1) + (z_2, y_2, z_2, 3z_2) = (z_1 + z_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, 3z_1 + 3z_2) \\ &= (z_1 + z_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, 3(z_1 + z_2)) \in W. \end{aligned}$$

- (ii) Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (z_1, y_1, z_1, 3z_1) &= (\alpha \cdot z_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1, \alpha \cdot (3z_1)) \\ &= (\alpha \cdot z_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1, 3(\alpha \cdot z_1)) \in W. \end{aligned}$$

Portanto, de (i) e (ii) concluímos que W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

- (c) $(0, 0, 0, 0) \in W$, pois $0 + 0 - 0 + 2 \times 0 = 0$, logo $W \neq \emptyset$.

- (i) Dados $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ e $v = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ em W , então $u = (x_1, y_1, x_1 + y_1 + 2t_1, t_1)$ e $v = (x_2, y_2, x_2 + y_2 + 2t_2, t_2)$

Logo,

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1, x_1 + y_1 + 2t_1, t_1) + (x_2, y_2, x_2 + y_2 + 2t_2, t_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, (x_1 + y_1 + 2t_1) + (x_2 + y_2 + 2t_2), t_1 + t_2) \\ &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) + 2(t_1 + t_2), t_1 + t_2) \in W. \end{aligned}$$

- (ii) Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (x_1, y_1, x_1 + y_1 + 2t_1, t_1) &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot (x_1 + y_1 + 2t_1), \alpha \cdot t_1) \\ &= (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot x_1 + \alpha \cdot y_1 + 2(\alpha \cdot t_1), \alpha \cdot t_1) \in W. \end{aligned}$$

Portanto, de (i) e (ii) concluímos que W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

- (d) $(0, 0, 0, 0) \notin W$, pois $0 \in \mathbb{Q}$.

Portanto, W não é subespaço de $\mathbb{R}^4$.

4. Considere $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, conjunto dos polinômios de grau $\leq n$ reunido com o polinômio nulo. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço de $(\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

- (a) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); 0 \text{ é raiz de } p(t)\}$;
 (b) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(t) \text{ é o polinômio nulo ou } p(t) \text{ tem grau ímpar}\}$;
 (c) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(t) \text{ é divisível por } 1 - t\}$; (d) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(0) = p(1)\}$;
 (e) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(t) \text{ tem todos os coeficientes iguais}\}$;
 (f) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); \text{ a soma dos coeficientes de } p(t) \text{ é igual a zero}\}.$

Solução:

- (a) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(0) = 0\}$, $W \neq \emptyset$, pois o polinômio nulo p_0 está em W , já que $p_0(0) = 0$.

Dados p e q em W e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $p(0) = 0$ e $q(0) = 0$, logo:

- (i) $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = 0 + 0 = 0$, portanto $p+q \in W$.
(ii) $(\alpha \cdot p)(0) = \alpha \cdot p(0) = \alpha \cdot 0 = 0$, portanto $\alpha \cdot p \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

- (b) Sejam $p(t) = 2+t$ e $q(t) = 5-t$ estão em W , pois ambos são polinômios reais de grau 1, porém $p+q \notin W$, já que $(p+q)(t) = p(t) + q(t) = (2+t) + (5-t) = 7$, polinômio constante de grau 0.

Portanto, W não é subespaço de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

- (c) Observemos que $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); p(t) = (1-t) \cdot q(t) \text{ com } q(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\}$, consequentemente $W \neq \emptyset$, pois o polinômio nulo $p_0(t) = (1-t) \cdot p_0(t)$, e portanto $p_0 \in W$.

Dados p_1 e p_2 em W , então $p_1(t) = (1-t) \cdot q_1(t)$ e $p_2(t) = (1-t) \cdot q_2(t)$, com $q_1(t), q_2(t) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, logo dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

- (i) $(p+q)(t) = p(t) + q(t) = ((1-t) \cdot q_1(t)) + ((1-t) \cdot q_2(t)) = (1-t) \cdot \underbrace{(q_1(t) + q_2(t))}_{\in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})}$,

portanto $p_1 + p_2 \in W$.

- (ii) $(\alpha \cdot p_1)(t) = \alpha \cdot ((1-t) \cdot q_1(t)) = (1-t) \cdot \underbrace{(\alpha \cdot q_1(t))}_{\in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})}$, portanto $\alpha \cdot p_1 \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

- (d) $W \neq \emptyset$, pois o polinômio nulo p_0 está em W , já que $p_0(0) = 0 = p_0(1)$.

Dados p e q em W e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $p(0) = p(1)$ e $q(0) = q(1)$, logo:

- (i) $(p+q)(0) = p(0) + q(0) = p(1) + q(1) = (p+q)(1)$, portanto $p+q \in W$.
(ii) $(\alpha \cdot p)(0) = \alpha \cdot p(0) = \alpha \cdot p(1) = (\alpha \cdot p)(1)$, portanto $\alpha \cdot p \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

- (e) Observemos que $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); a_0 = a_1 = \cdots = a_n\}$, consequentemente $W \neq \emptyset$, pois o polinômio nulo $p_0(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$, com $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ e portanto $p_0 \in W$.

Dados p e q em W , então $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ e $q(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n$, com $a_0 = a_1 = \cdots = a_n$ e $b_0 = b_1 = \cdots = b_n$, logo dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

- (i) $(p+q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) + (b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n)$
 $= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n$, com $a_0 + b_0 = a_1 + b_1 = \cdots = a_n + b_n$,
portanto $p+q \in W$.
(ii) $(\alpha \cdot p)(t) = \alpha \cdot (a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) = (\alpha \cdot a_0) + (\alpha \cdot a_1)t + \cdots + (\alpha \cdot a_n)t^n$, com
 $\alpha \cdot a_0 = \alpha \cdot a_1 = \cdots = \alpha \cdot a_n$, portanto $\alpha \cdot p \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

- (f) $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0\}$, consequentemente $W \neq \emptyset$, pois o polinômio nulo $p_0(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$, com $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$ e portanto $p_0 \in W$.

Dados p e q em W , então $p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n$ e $q(t) = b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n$, com $a_0 + a_1 + \cdots + a_n = 0$ e $b_0 + b_1 + \cdots + b_n = 0$, logo dado $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

- (i) $(p + q)(t) = p(t) + q(t) = (a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) + (b_0 + b_1t + \cdots + b_nt^n) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + \cdots + (a_n + b_n)t^n$, com $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n) = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + (b_0 + b_1 + \cdots + b_n) = 0 + 0 = 0$, portanto $p + q \in W$.
- (ii) $(\alpha \cdot p)(t) = \alpha \cdot (a_0 + a_1t + \cdots + a_nt^n) = (\alpha \cdot a_0) + (\alpha \cdot a_1)t + \cdots + (\alpha \cdot a_n)t^n$, com $(\alpha \cdot a_0) + (\alpha \cdot a_1) + \cdots + (\alpha \cdot a_n) = \alpha \cdot (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = \alpha \cdot 0 = 0$, portanto $\alpha \cdot p \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

5. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

- (a) $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f \text{ é função ímpar}\}$; (b) $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(0) = 1\}$;
 (c) $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(0) = f(1)\}$; (d) $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$;
 (e) $W_{a,b} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(x) = ae^x + be^{-x}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}\}$.

Solução:

- (a) Observemos que $W = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(-x) = -f(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$, logo $W \neq \emptyset$, pois a função nula f_0 está em W , já que: $f_0(x) = 0 = -f_0(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dados f e g em W , então $f(-x) = -f(x)$ e $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, logo dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- (i) $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) \stackrel{f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R})}{=} (-f(x)) + (-g(x)) = -(f(x) + g(x)) = -(f + g)(x)$, portanto $f + g \in W$.
- (ii) $(\alpha \cdot f)(-x) = \alpha \cdot f(-x) \stackrel{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})}{=} \alpha \cdot (-f(x)) = -(\alpha \cdot f(x)) = (-\alpha \cdot f)(x)$, portanto $\alpha \cdot f \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

- (b) A função nula $f_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ não está em W , pois $f_0(0) = 0 \neq 1$.

Portanto, W não é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

- (c) Idem ao exercício 4(d) desta seção 3.2.

- (d) A função $f(x) = e^x$ está em W , pois $f(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, no entanto $(-1) \cdot f(x) = -(e^x) = -e^x < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e portanto $(-1) \cdot f \notin W$.

Logo, W não é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

- (e) A função nula f_0 está em W , pois $f_0(x) = 0 = 0 \cdot e^x + 0 \cdot e^{-x}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Se f e g estão em W , então $f(x) = a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}$ e $g(x) = c \cdot e^x + d \cdot e^{-x}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, logo

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}) + (c \cdot e^x + d \cdot e^{-x}) = (a + c) \cdot e^x + (b + d) \cdot e^{-x},$$

portanto $f + g \in W$.

E, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, então: $\alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot (a \cdot e^x + b \cdot e^{-x}) = \underbrace{(\alpha \cdot a)}_{\in \mathbb{R}} \cdot e^x + \underbrace{(\alpha \cdot b)}_{\in \mathbb{R}} \cdot e^{-x}$, portanto $\alpha \cdot f \in W$.

Logo, W é subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

6. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço de $\mathcal{C}([0, 1])$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com $\mathcal{C}([0, 1]) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é uma função contínua}\}$.

- (a) $W = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f \text{ é crescente}\}$; (b) $W = \{f \in \mathcal{C}([0, 1]); f'(0) = f'(1) = 0\}$.

Solução:

- (a) A função $f(x) = x + 1$ para todo $x \in [0, 1]$ está em $\mathcal{C}([0, 1])$ e é crescente, pois $f(x) = x + 1 > x$ para todo $x \in [0, 1]$. No entanto $((-1) \cdot f)(x) = -f(x) = -(x + 1)$, e por exemplo $((-1) \cdot f)(2) = -f(2) = -(2 + 1) = -3 < 2$ portanto $(-1) \cdot f$ não é função crescente, conseqüentemente $(-1) \cdot f \notin W$.

Logo, W não é subespaço de $\mathcal{C}([0, 1])$.

- (b) $W \neq \emptyset$, pois a função nula f_0 está em W , já que $f'_0(0) = 0 = f'_0(1)$.

Dados f e g em W , então $f'(0) = f'(1)$ e $g'(0) = g'(1)$, logo dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- (i) $(f + g)'(0) = f'(0) + g'(0) = f'(1) + g'(1) = (f + g)'(1)$, portanto $f + g \in W$.
(ii) $(\alpha \cdot f)'(0) = \alpha \cdot f'(0) = \alpha \cdot f'(1) = (\alpha \cdot f)'(1)$, portanto $\alpha \cdot f \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $\mathcal{C}([0, 1])$.

7. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço do espaço vetorial $M_n(\mathbb{C})$, com $n \geq 2$.

- (a) $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é hermitiana}\}$, sobre o corpo $\mathbb{R}$.
(b) $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é hermitiana}\}$, sobre o corpo $\mathbb{C}$.
(c) $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é anti-hermitiana}\}$, sobre o corpo $\mathbb{R}$.
(d) $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A \text{ é anti-hermitiana}\}$, sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Solução:

- (a) Observemos que $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A^* = \bar{A}^T = A\}$, portanto $W \neq \emptyset$, pois $I_n^* = \bar{I}_n^T = I_n$, conseqüentemente $I_n \in W$.

Dados A e B em W , então $A^* = \bar{A}^T = A$ e $B^* = \bar{B}^T = B$, logo dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- (i) $A + B = \bar{A}^T + \bar{B}^T = (\bar{A} + \bar{B})^T = \overline{A + B}^T$, portanto $A + B \in W$.
(ii) $(\alpha \cdot A)^* = \overline{\alpha \cdot A}^T = \bar{\alpha} \cdot \bar{A}^T \stackrel{\alpha \in \mathbb{R}}{=} \alpha \cdot A$, portanto $\alpha \cdot A \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $M_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$.

- (b) Vimos no item acima que $I_n \in W$, porém $(1 + i) \cdot I_n \notin W$ uma vez que

$$((1 + i) \cdot I_n)^* = \overline{(1 + i) \cdot I_n}^T = \overline{1 + i} \cdot I_n = (1 - i) \cdot I_n \neq (1 + i) \cdot I_n.$$

Logo, W não é subespaço de $M_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.

- (c) $W = \{A \in M_n(\mathbb{C}); A^* = \bar{A}^T = -A\}$, portanto $W \neq \emptyset$, pois $0_n^* = \bar{0}_n^T = 0_n = -0_n$, conseqüentemente $0_n \in W$.

Dados A e B em W , então $A^* = \bar{A}^T = -A$ e $B^* = \bar{B}^T = -B$, logo dado $\alpha \in \mathbb{R}$, temos:

- (i) $-(A+B) = (-A) + (-B) = \overline{A}^T + \overline{B}^T = (\overline{A+B})^T = \overline{A+B}^T$, portanto $A+B \in W$.
(ii) $(\alpha \cdot A)^* = \overline{\alpha \cdot A}^T = \overline{\alpha} \cdot \overline{A}^T = \overline{\alpha} \cdot \overline{A}^T \stackrel{\alpha \in \mathbb{R}}{=} \alpha \cdot (-A) = -(\alpha \cdot A)$, portanto $\alpha \cdot A \in W$.

De (i) e (ii) concluímos que W é subespaço de $M_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$.

- (d) Observemos que se A é matriz anti-hermitiana, então sua diagonal principal é composta apenas de imaginários puros, logo se A é uma matriz anti-hermitiana com $a_{jj} = i$, para algum j , com $1 \leq j \leq n$, então o elemento da posição jj da matriz $(1+i) \cdot A$ é $(1+i) \times i = -1+i$ que não é imaginário puro, portanto $(1+i) \cdot A$ não é uma matriz anti-hermitiana, consequentemente $(1+i) \cdot A \notin W$.

Portanto, W não é subespaço de $M_n(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.

8. Verifique em cada um dos casos se W é um subespaço do espaço vetorial $\mathbb{C}^2$.

- (a) $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 - a_2 = 1 \text{ e } b_1 + b_2 = 0\}$, sobre o corpo $\mathbb{C}$.
(b) $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 + b_1i = 3(a_2 + b_2i)\}$, sobre o corpo $\mathbb{C}$.
(c) $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 - 2a_2 = 0 \text{ e } b_1 + b_2 = 0\}$, sobre o corpo $\mathbb{R}$.
(d) $W = \{(a_1 + ib_1, a_2 + ib_2) \in \mathbb{C}^2; a_1 - 2a_2 = 0 \text{ e } b_1 + b_2 = 0\}$, sobre o corpo $\mathbb{C}$.

Solução:

- (a) $0_{\mathbb{C}^2} = (0, 0) \notin W$, pois $0 - 0 = 0 \neq 1$.

Portanto W não é subespaço de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, nem sobre $\mathbb{R}$.

- (b) $(0, 0) \in W$, pois $3 \times (0 + 0i) = 0 + 0i$, consequentemente $W \neq \emptyset$.

- (i) Dados $u = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$ e $v = (c_1 + id_1, c_2 + id_2)$ em W , então $a_1 + b_1i = 3(a_2 + b_2i) = (3a_2) + (3b_2)i$ e $c_1 + d_1i = 3(c_2 + d_2i) = (3c_2) + (3d_2)i$, logo $u = (3a_2 + (3b_2)i, a_2 + ib_2)$ e $v = (3c_2 + (3d_2)i, c_2 + id_2)$, logo:

$$\begin{aligned} u + v &= (3a_2 + (3b_2)i, a_2 + ib_2) + (3c_2 + (3d_2)i, c_2 + id_2) \\ &= ((3a_2 + (3b_2)i) + (3c_2 + (3d_2)i), (a_2 + ib_2) + (c_2 + id_2)) \\ &= ((3(a_2 + c_2) + 3(b_2 + d_2)i), (a_2 + c_2) + i(b_2 + d_2)) \in W. \end{aligned}$$

- (ii) Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u &= \alpha \cdot (3a_2 + (3b_2)i, a_2 + ib_2) = (\alpha \cdot (3a_2 + (3b_2)i), \alpha \cdot (a_2 + ib_2)) \\ &= (3(\alpha \cdot a_2) + 3(\alpha \cdot b_2)i, (\alpha \cdot a_2) + i(\alpha \cdot b_2)) \in W. \end{aligned}$$

Portanto, de (i) e (ii) concluímos que W é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$.

- (c) e (d) $(0, 0) \in W$, pois $0 = 0 + 0i$ e portanto $0 - 2 \times 0 = 0$ e $0 + 0 = 0$, consequentemente $W \neq \emptyset$.

- (i) Dados $u = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2)$ e $v = (c_1 + id_1, c_2 + id_2)$ em W , então $a_1 - 2a_2 = 0$, $b_1 + b_2 = 0$, $c_1 - 2c_2 = 0$ e $d_1 + d_2 = 0$, logo $u = (2a_2 - ib_2, a_2 + ib_2)$ e $v = (2c_2 - id_2, c_2 + id_2)$, logo:

$$\begin{aligned} u + v &= (2a_2 - ib_2, a_2 + ib_2) + (2c_2 - id_2, c_2 + id_2) \\ &= ((2a_2 - ib_2) + (2c_2 - id_2), (a_2 + ib_2) + (c_2 + id_2)) \\ &= (2(a_2 + c_2) - i(b_2 + d_2), (a_2 + c_2) + i(b_2 + d_2)) \in W. \end{aligned}$$

- (ii) Além disso, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} \alpha \cdot u &= \alpha \cdot (2a_2 - ib_2, a_2 + ib_2) = (\alpha \cdot (2a_2 - ib_2), \alpha \cdot (a_2 + ib_2)) \\ &= (2(\alpha \cdot a_2) - i(\alpha \cdot b_2), (\alpha \cdot a_2) + i(\alpha \cdot b_2)) \in W. \end{aligned}$$

Portanto, de (i) e (ii) concluímos que W é subespaço vetorial de $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$.

3.3 Soma e Intersecção de Subespaços Vetoriais

1. Determine, em cada um dos casos, os subespaços $U + W$ e $U \cap W$ de $\mathbb{R}^3$ e verifique se o subespaço $U + W$ é uma soma direta.

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$.

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y - z\}$.

Solução:

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$, logo:

$$(i) \quad (x, y, z) \in U \cap W \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y - 3z \\ x = -y - z \end{cases}$$

$$\implies 2y - 3z = -y - z \iff z = \frac{3}{2}y \text{ e } x = \frac{5}{2}y.$$

Logo, $U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = \frac{5}{2}y \text{ e } z = \frac{3}{2}y\}$.

(ii) $U + W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = \underbrace{(2a - 3b, a, b)}_{\in U} + \underbrace{(c, -c - d, d)}_{\in W}\}.$

Logo, $(x, y, z) \in U + W \iff \begin{cases} 2a - 3b + c = x \\ a - c - d = y \\ b + d = z \end{cases}$, cuja solução é:

$$\begin{cases} b = z - d \\ d \in \mathbb{R} \\ a = \frac{x + y + 3z}{3} - \frac{2d}{3} \\ c = \frac{x - 2y + 3z}{3} - \frac{2d}{3} \end{cases}, \text{ logo tomando } \begin{cases} b = z \\ d = 0 \\ a = (x + y + 3z)/3 \\ c = (x - 2y + 3z)/3 \end{cases} \text{ podemos escre-$$

ver qualquer vetor (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ como soma de um vetor de U e um vetor de W .

Portanto, $U + W = \mathbb{R}^3$, porém a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

(b) $(x, y, z) \in U \iff x = y = z$ e $(x, y, z) \in W \iff x = y - z$, logo:

$$(i) \quad (x, y, z) \in U \cap W \iff \begin{cases} x = y \\ z = y \\ x = -y - z \end{cases} \iff x = y = z = 0.$$

Logo, $U \cap W = \{(0, 0, 0)\}$.

(ii) $U + W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y, z) = \underbrace{(a, a, a)}_{\in U} + \underbrace{(b - c, b, c)}_{\in W}\}.$

Logo, $(x, y, z) \in U + W \iff \begin{cases} a + b - c = x \\ a + b = y \\ a + c = z \end{cases}$, cuja solução é:

$$\begin{cases} a = x - y + z \\ b = -x + 2y - z \\ c = -x + y \end{cases}, \text{ portanto podemos escrever qualquer vetor } (x, y, z) \text{ de } \mathbb{R}^3$$

como soma de um vetor de U e um vetor de W .

Portanto, $U \oplus W = \mathbb{R}^3$ e a soma é direta, pois $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

2. Determine, em cada um dos casos, os subespaços $U + W$ e $U \cap W$ de $\mathbb{R}^4$ e verifique se o subespaço $U + W$ é uma soma direta.

$$(a) \quad U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = t \text{ e } y = 2z\} \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y - z + t = 0\}.$$

$$(b) \quad U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z - t = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + z + t = 0\}.$$

$$(c) \quad U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z + t = 0\}.$$

Solução:

$$(a) \quad (x, y, z, t) \in U \iff x = t \text{ e } y = 2z \quad \text{e} \quad (x, y, z, t) \in W \iff y - z + t = 0, \text{ logo:}$$

$$(i) \quad (x, y, z, t) \in U \cap W \iff \begin{cases} x = t \\ y = 2z \\ z = y + t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = t, y = -2t \text{ e } z = -t\}.$$

$$(ii) \quad U + W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; (x, y, z, t) = \underbrace{(a, 2b, b, a)}_{\in U} + \underbrace{(c, d, d + e, e)}_{\in W}\}.$$

$$\text{Logo, } (x, y, z, t) \in U + W \iff \begin{cases} a + c = x \\ 2b + d = y \\ b + d + e = z \\ a + e = t \end{cases}, \text{ cuja solução é:}$$

$$\begin{cases} e \in \mathbb{R} \\ a = t - e \\ b = y - z + e \\ c = x - t + e \\ d = -y + 2z - 2e \end{cases}, \text{ portanto tomando } \begin{cases} e = 0 \\ a = t \\ b = y - z \\ c = x - t \\ d = -y + 2z \end{cases} \text{ vemos que qualquer}$$

vetor (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ pode ser escrito como soma de um vetor de U e um vetor de W .

Portanto, $U + W = \mathbb{R}^4$ e a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

$$(b) \quad (x, y, z, t) \in U \iff x + y + z - t = 0 \quad \text{e} \quad (x, y, z, t) \in W \iff x - y + z + t = 0, \text{ logo:}$$

$$(i) \quad (x, y, z, t) \in U \cap W \iff \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ -2y + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = t \\ z = -x \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = t \text{ e } z = -x\}.$$

$$(ii) \quad U + W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; (x, y, z, t) = \underbrace{(a, b, c, a + b + c)}_{\in U} + \underbrace{(d, d + e + f, e, f)}_{\in W}\}.$$

$$\text{Logo, } (x, y, z, t) \in U + W \iff \begin{cases} a + d = x \\ b + d + e + f = y \\ c + e = z \\ a + b + c + f = t \end{cases}, \text{ cuja solução é:}$$

$$\begin{cases} f \in \mathbb{R} \\ e \in \mathbb{R} \\ a = (x - y - z + t)/2 + e \\ b = (-x + y - z + t)/2 - f \\ c = z - e \\ d = (x + y + z - t)/2 - e \end{cases}, \text{ portanto tomando } \begin{cases} f = 0 \\ e = 0 \\ a = (x - y - z + t)/2 \\ b = (-x + y - z + t)/2 \\ c = z \\ d = (x + y + z - t)/2 \end{cases} \text{ vemos que}$$

qualquer vetor (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ pode ser escrito como soma de um vetor de U e um vetor de W .

Portanto, $U + W = \mathbb{R}^4$ e a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

(c) $(x, y, z, t) \in U \iff y = -x$ e $(x, y, z, t) \in W \iff t = -z$, logo:

(i) $(x, y, z, t) \in U \cap W \iff (x, y, z, t) = (x, -x, z, -z)$.

Logo, $U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = -x \text{ e } t = -z\}$.

(ii) $U + W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; (x, y, z, t) = \underbrace{(a, -a, b, c)}_{\in U} + \underbrace{(d, e, f, -f)}_{\in W}\}$.

Logo, $(x, y, z, t) \in U + W \iff \begin{cases} a + d = x \\ -a + e = y \\ b + f = z \\ c - f = t \end{cases}$, cuja solução é:

$\begin{cases} f \in \mathbb{R} \\ e \in \mathbb{R} \\ a = -y + e \\ b = z - f \\ c = t + f \\ d = x + y - e \end{cases}$, portanto tomando $\begin{cases} f = 0 \\ e = 0 \\ a = -y \\ b = z \\ c = t \\ d = x + y \end{cases}$ podemos escrever qualquer

vetor (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ como soma de um vetor de U e um vetor de W .

Portanto, $U + W = \mathbb{R}^4$ e a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

3. Determine, em cada um dos casos, os subespaços $U + W$ e $U \cap W$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e verifique se o subespaço $U + W$ é uma soma direta.

(a) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 - a_2 = 0\}$ e

$W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = 0\}$.

(b) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = a_1 = a_2\}$ e

$W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$.

Solução:

(a) $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \iff a_0 = a_2$ e $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in W \iff a_0 = 0$, logo:

(i) $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \cap W \iff a_0 = a_2 = 0$.

Logo, $U \cap W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = 0 \text{ e } a_2 = 0\}$.

(ii) $U + W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = \underbrace{b_0 + b_1t + b_2t^2}_{\in U} + \underbrace{c_1t + c_2t^2}_{\in W}\}$.

Logo, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U + W \iff \begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 + c_1 = a_1 \\ b_2 + c_2 = a_2 \end{cases}$, podemos tomar por

exemplo $\begin{cases} b_0 = a_0 \\ b_1 = a_1 \\ c_1 = 0 \\ c_2 = a_2 - a_0 \end{cases}$, conseqüentemente todo $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

pode ser escrito como soma de um elemento de U e um elemento de W .

Portanto, $U \oplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$.

(b) $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \iff a_0 = a_1 = a_2$ e $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in W \iff a_0 = -a_1 - a_2$, logo:

$$(i) \quad p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \cap W \iff a_0 = a_1 = a_2 = 0.$$

$$\text{Logo, } U \cap W = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}.$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} U + W &= \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); \\ p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 &= \underbrace{b_0 + b_1t + b_2t^2}_{\in U} + \underbrace{(-c_1 - c_2) + c_1t + c_2t^2}_{\in W}\}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U + W \iff \begin{cases} b_0 - c_1 - c_2 = a_0 \\ b_0 + c_1 = a_1 \\ b_0 + c_2 = a_2 \end{cases}, \text{ podemos tomar}$$

$$\text{por exemplo } \begin{cases} b_0 = (a_0 + a_1 + a_2)/3 \\ c_1 = (-a_0 + 2a_1 - a_2)/3 \\ c_2 = (-a_0 - a_1 + 2a_2)/3 \end{cases}, \text{ consequentemente todo}$$

$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como soma de um elemento de U e um elemento de W .

Portanto, $U \oplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ e a soma é direta, pois $U \cap W = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$.

4. Determine, em cada um dos casos, os subespaços $U + W$ e $U \cap W$ de $M_2(\mathbb{R})$ e verifique se o subespaço $U + W$ é uma soma direta.

$$(a) \quad U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} = -a_{12} \text{ e } a_{21} = a_{22} \right\} \quad \text{e}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 \right\}.$$

$$(b) \quad U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = \lambda \cdot I_2, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{e}$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} + a_{12} + a_{22} = 0 \right\}.$$

Solução:

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \iff a_{11} = -a_{12} \text{ e } a_{21} = a_{22} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in W \iff a_{11} = a_{12} + a_{21} - a_{22}.$$

$$(i) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W \iff \begin{cases} a_{11} = -a_{12} \\ a_{21} = a_{22} \\ a_{11} = a_{12} + a_{21} - a_{22} \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11} = -a_{12} = 0 \\ a_{21} = a_{22} \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} = -a_{12} = 0 \text{ e } a_{21} = a_{22} \right\}.$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} U + W &= \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); \right. \\ \left. \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} -b_{12} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{12} + c_{21} - c_{22} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{\in W} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U + W \iff \begin{cases} -b_{12} + c_{12} + c_{21} - c_{22} = a_{11} \\ b_{12} + c_{12} = a_{12} \\ b_{21} + c_{21} = a_{21} \\ b_{21} + c_{22} = a_{22} \end{cases}, \text{ cuja solução}$$

$$\text{é: } \begin{cases} c_{22} \in \mathbb{R} \\ b_{12} = (-a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22})/2 \\ b_{21} = a_{22} - c_{22} \\ c_{12} = (a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22})/2 \\ c_{21} = a_{21} - a_{22} + c_{22} \end{cases}, \text{ portanto tomando } \begin{cases} c_{22} = 0 \\ b_{12} = (-a_{11} + a_{12} + a_{21} - a_{22})/2 \\ b_{21} = a_{22} \\ c_{12} = (a_{11} + a_{12} - a_{21} + a_{22})/2 \\ c_{21} = a_{21} - a_{22} \end{cases}$$

podemos escrever qualquer matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ de $M_2(\mathbb{R})$ como soma de um vetor de U e um vetor de W .

Portanto, $U + W = M_2(\mathbb{R})$, porém a soma não é direta, pois $U \cap W \neq \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

$$(b) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \iff a_{11} = a_{22} = \lambda \text{ e } a_{12} = a_{21} = 0 \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in W \iff a_{11} = -a_{12} - a_{22}.$$

$$(i) A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W \iff a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0.$$

Logo, $U \cap W = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

$$(ii) U + W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); \right. \\ \left. \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{11} \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{bmatrix} -c_{12} - c_{22} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}}_{\in W} \right\}$$

$$\text{Logo, } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U + W \iff \begin{cases} b_{11} - c_{12} - c_{22} = a_{11} \\ c_{12} = a_{12} \\ c_{21} = a_{21} \\ b_{11} + c_{22} = a_{22} \end{cases}, \text{ cuja solução é:}$$

$$\begin{cases} c_{12} = a_{12} \\ c_{21} = a_{21} \\ b_{11} = (a_{11} + a_{12} + a_{22})/2 \\ c_{22} = (-a_{11} - a_{12} + a_{22})/2 \end{cases}, \text{ portanto podemos escrever qualquer matriz } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ de } M_2(\mathbb{R}) \text{ como soma de um vetor de } U \text{ e um vetor de } W.$$

Portanto, $U \oplus W = M_2(\mathbb{R})$ e a soma é direta, pois $U \cap W = \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

5. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, dados U e W subespaços próprios de V , ou seja, $U \subsetneq V$ e $W \subsetneq V$. Mostre que a reunião $U \cup W$ é um subespaço de V se, e somente se, $U \subset W$ ou $W \subset U$.

Solução:

Suponhamos que $U \cup W$ é um subespaço de V e que U não está contido em W .

Logo, existe $u \in U$ tal que $u \notin W$, $U \cup W$ é um subespaço então para todo $w \in W$, temos $v_w = u + w \in U \cup W$, mas $v_w = u + w \notin W$, pois caso contrário teríamos $u = v_w + (-w) \in W$.

Portanto, $v_w = u + w \in U$, consequentemente $w = v_w + (-u) \in U$ para todo $w \in W$, logo $W \subset U$.

Analogamente se supomos que $U \cup W$ é um subespaço de V e que W não está contido em U , concluímos que $U \subset W$.

Reciprocamente, suponhamos que $U \subset W$, é claro que $U \cup W \neq \emptyset$, pois $U \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$.

Dados $v_1, v_2 \in U \cup W$, se $v_1, v_2 \in U$ ou $v_1, v_2 \in W$, como U e W são subespaços de V segue que $v_1 + v_2 \in U$ ou em $v_1 + v_2 \in W$, e portanto $v_1 + v_2 \in U \cup W$.

No caso em que $v_1 \in U$ e $v_2 \in W$, como $U \cup W$ então $v_1 \in W$ e, portanto $v_1 + v_2 \in W$, e portanto $v_1 + v_2 \in U \cup W$.

Já a multiplicação por escalar é imediata, pois se $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in U \cup W$, então $v \in U$ ou $v \in W$, e portanto, $\alpha \cdot v \in U$ ou $\alpha \cdot v \in W$, consequentemente $\alpha \cdot v \in U \cup W$.

Logo, $U \cup W$ é um subespaço de V .

De maneira análoga mostramos que se $W \subset U$, então $U \cup W$ é um subespaço de V .

6. Dê exemplos de subespaços próprios U e W em V tais que $U + W = V$ e $U \cap W \neq \{0_V\}$, nos seguintes casos:

(a) $V = \mathbb{R}^4$; (b) $V = M_2(\mathbb{R})$; (b) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Solução:

- (a) Sejam $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = 0\}$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

Logo, $U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = 0 \text{ e } z = 0\} \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Por outro lado, para todo $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ podemos escrever $(x, y, z, t) = \underbrace{(0, y, z, 0)}_{\in U} + \underbrace{(x, 0, 0, t)}_{\in W}$.

Portanto, $U + W = \mathbb{R}^4$

- (b) Sejam $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} = a_{22} \right\}$ e $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{12} = a_{21} \right\}$.

Logo, $U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} = a_{22} \text{ e } a_{12} = a_{21} \right\} \neq \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

Por outro lado, para todo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ podemos escrever

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} - a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - a_{11} \end{bmatrix}}_{\in W}.$$

Portanto, $U + W = M_2(\mathbb{R})$

- (c) Sejam $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_0 = a_1\}$ e $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_3 = 0\}$.

Logo, $U \cap W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_0 = a_1 \text{ e } a_3 = 0\} \neq \{0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}\}$.

Por outro lado, para todo $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ podemos escrever

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = \underbrace{(a_0 + a_0t + a_3t^3)}_{\in U} + \underbrace{((a_1 - a_0)t + a_2t^2)}_{\in W}.$$

Portanto, $U + W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

7. Dados os subespaços vetoriais $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}$; $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$ e $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = 0\}$ do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(a) Verifique que $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$, $U_1 + U_3 = \mathbb{R}^3$ e $U_2 + U_3 = \mathbb{R}^3$.

(b) Em algum dos casos a soma é direta? Quais?

Solução:

(a) Como $(x, y, z) = \underbrace{(x, y, x)}_{\in U_1} + \underbrace{(0, x+z, z-x)}_{\in U_2}$, segue que $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$.

Já que $(x, y, z) = \underbrace{(x, y, x)}_{\in U_1} + \underbrace{(0, 0, z-x)}_{\in U_3}$, então $U_1 + U_3 = \mathbb{R}^3$.

Finalmente, $(x, y, z) = \underbrace{(0, 0, z)}_{\in U_3} + \underbrace{(x, y, -y-x)}_{\in U_2}$, então $U_2 + U_3 = \mathbb{R}^3$.

(b) Já que $U_1 \cap U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z \text{ e } y = -2z\} \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, então $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$ não é soma direta.

Como $U_1 \cap U_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ e $U_2 \cap U_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, segue que $U_1 \oplus U_3 = \mathbb{R}^3$ e $U_2 \oplus U_3 = \mathbb{R}^3$.

8. Determine, em cada um dos casos, um subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$.

(a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ e } z + t = 0\}$ em $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $U = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A \text{ é diagonal}\}$ em $V = M_2(\mathbb{C})$ como espaço vetorial complexo.

(c) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_1 + a_2 = 0\}$ em $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ como espaço vetorial complexo.

Solução:

(a) Tomando o subespaço $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = 0 \text{ e } z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$ temos:

(i) $U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0, z + t = 0, x = 0 \text{ e } z = 0\} = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

(ii) Para todo $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ podemos escrever

$$(x, y, z, t) = \underbrace{(x, -x, z, -z)}_{\in U} + \underbrace{(0, y+x, 0, z+t)}_{\in W}.$$

Portanto, $U \oplus W = \mathbb{R}^4$

(b) Tomando o subespaço $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); a_{11} = 0 \right\}$ de $M_2(\mathbb{C})$, então:

(i) $U \cap W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); a_{11} = a_{22}, a_{12} = a_{21} = 0 \text{ e } a_{11} = 0 \right\} = \{0_{M_2(\mathbb{C})}\}.$

(ii) Para todo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ podemos escrever

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - a_{11} \end{bmatrix}}_{\in W}.$$

Portanto, $U \oplus W = M_2(\mathbb{C})$

(c) Tomando o subespaço $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_0 = a_1 = 0\}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ temos:

$$(i) \quad U \cap W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_0 = a_1 = 0 \text{ e } a_1 + a_2 = 0\} = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{C})}\}.$$

(ii) Para todo $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ podemos escrever

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = \underbrace{(a_0 + a_1t + (-a_1)t^2)}_{\in U} + \underbrace{(a_2 + a_1)t^2}_{\in W}.$$

Portanto, $U \oplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$.

9. Verifique, em cada um dos casos, se a soma dos subespaços do espaço vetorial complexo é direta.

(a) Em $\mathbb{C}^3$ a soma $U + W$, com $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_3 = 0\}$ e $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_2 = 0 \text{ e } z_3 = 0\}$.

(b) Em $M_2(\mathbb{C})$ as somas $U_1 + U_2$, $U_1 + U_3$ e $U_2 + U_3$ com $U_1 = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A \text{ é diagonal}\}$, $U_2 = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A^T = A\}$ e $U_3 = \{A \in M_2(\mathbb{C}); A^T = -A\}$.

(c) Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ a soma $U + W$, com $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_2 = 0\}$ e $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_0 = 0 \text{ e } a_1 + a_2 = 0\}$.

Solução:

$$(a) \text{ Como } (z_1, z_2, z_3) \in U \cap W \iff \begin{cases} z_1 + z_3 = 0 \\ z_1 + z_2 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases} \implies (z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 0) = 0_{\mathbb{C}^3}.$$

Portanto, a soma $U + W$ é direta.

Além disso, para todo $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ temos:

$$(z_1, z_2, z_3) = \underbrace{(-z_3, z_1 + z_2 + z_3, z_3)}_{\in U} + \underbrace{(z_1 + z_3, -(z_1 + z_3), 0)}_{\in W}.$$

Logo, $U \oplus W = \mathbb{C}^3$.

(b) Observemos que $U_1 \subset U_2$, pois toda matriz diagonal é simétrica, logo $U_1 + U_2 = U_2$ e a soma não é direta.

Por outro lado, $U_2 \cap U_3 = \{0_{n \times n}\}$, pois a única matriz simétrica e anti-simétrica é a matriz nula, como $U_1 \subset U_2$, segue ainda que $U_1 \cap U_3 = \{0_{n \times n}\}$.

Portanto, as somas $U_2 + U_3$ e $U_1 + U_3$ são diretas.

$$\text{Além disso, vimos que se } A \in M_2(\mathbb{C}), \text{ então } A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\in U_2} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\in U_3}.$$

Logo, $U_2 \oplus U_3 = M_2(\mathbb{C})$.

$$\text{Também podemos ver que } U_1 \oplus U_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); a_{11} = a_{22} \text{ e } a_{21} = -a_{12} \right\}.$$

$$(c) \text{ Observemos que } p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \cap W \iff \begin{cases} a_2 = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \implies p(t) = p_0 = 0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{C})}.$$

Portanto, a soma $U + W$ é direta.

Além disso, para todo $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, temos:

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = \underbrace{(-a_2t + a_2t^2)}_{\in U} + \underbrace{(a_0 + (a_1 + a_2)t)}_{\in W}.$$

Logo, $U_2 \oplus U_3 = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$.

10. Seja V um espaço vetorial qualquer sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam U e W subespaços vetoriais de V . Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

- (a) () $U \cap W$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $U \cap W = U$ ou $U \cap W = W$.
- (b) () $U + W$ é subespaço vetorial de V se, e somente se, $U \subset W$ ou $W \subset U$.
- (c) () V é um espaço vetorial, então está definida em V a soma e a multiplicação entre seus vetores, satisfazendo as propriedades: comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento simétrico.
- (d) () O próprio espaço vetorial V e o subespaço $\{\emptyset\}$ são os chamados subespaços vetoriais triviais de V .

Solução:

- (a) **(F)** Se U e W são subespaços vetoriais de V , então $U \cap W$ é sempre um subespaço vetorial de V .
- (b) **(F)** Se U e W são subespaços vetoriais de V , então $U + W$ é sempre um subespaço vetorial de V .
- (c) **(F)** V é um espaço vetorial, estão definidas em V a soma e a multiplicação por escalar, porém não há multiplicação entre seus vetores definida.
- (d) **(F)** Os subespaços vetoriais triviais de V são o próprio espaço vetorial V e o subespaço nulo $\{0_V\}$.

3.4 Combinação Linear

1. Determine, em cada um dos casos, números reais a e b ou a , b , e c tais que v se escreva como combinação linear dos vetores de S , subconjunto do espaço vetorial V .

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1, -3, 2), (2, -1, 1)\}$ e $v = (1, 2, -1)$.

(b) $V = M_2(\mathbb{R})$ $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$ e $v = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 13 \end{bmatrix}$.

(c) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ $S = \{1 + t + t^3, t^2 - 5t^3, 2t + t^2 + t^3\}$ e $v = 5 + t - 2t^2 + 3t^3$.

Solução:

(a) $a(1, -3, 2) + b(2, -1, 1) = (1, 2, -1) \iff (a + 2b, -3a - b, 2a + b) = (1, 2, -1)$

$$\iff \begin{cases} a + 2b = 1 \\ -3a - b = 2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 5b = 5 \\ -3b = -3 \end{cases} \sim \begin{cases} a + 2b = 1 \\ 5b = 5 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Logo, $b = 1$ e $a = -1$.

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad a \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 13 \end{bmatrix} \\
 \iff \begin{bmatrix} a+c & -a+b \\ -b-c & 2a+b+3c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 13 \end{bmatrix} \\
 \iff \begin{cases} a+c = 3 \\ -a+b = 4 \\ -b-c = -7 \\ 2a+b+3c = 13 \end{cases} \sim \begin{cases} a+c = 3 \\ b+c = 7 \\ -b-c = -7 \\ b+c = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} c \in \mathbb{R} \\ a = 3-c \\ b = 7-c \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Logo, podemos tomar por exemplo $c = 0$, $a = 3$ e $b = 7$.

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad a(1+t+t^3) + b(t^2-5t^3) + c(2t+t^2+t^3) &= 5+t-2t^2+3t^3 \\
 \iff a + (a+2c)t + (b+c)t^2 + (a-5b+c)t^3 &= 5+t-2t^2+3t^3 \\
 \iff \begin{cases} a = 5 \\ a+2c = 1 \\ b+c = -2 \\ a-5b+c = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 5 \\ c = -2 \\ b = 0 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Logo, $a = 5$, $b = 0$ e $c = -2$.

2. Seja $S = \{(1, 2, 1, 0), (4, 1, -2, 3), (1, 2, 6, -5), (-2, 3, -1, 2)\}$ subconjunto de $\mathbb{R}^4$, verifique se v se escreve como combinação linear dos vetores de S nos seguintes casos:

- (a) $v = (3, 6, 3, 0)$; (b) $v = (1, 0, -1, 0)$; (c) $v = (3, 6, -2, 5)$.

Solução:

(a) Observemos que $(3, 6, 3, 0) = 3(1, 2, 1, 0)$, portanto:

$$3(1, 2, 1, 0) + 0(4, 1, -2, 3) + 0(1, 2, 6, -5) + 0(-2, 3, -1, 2) = (3, 6, 3, 0).$$

(b) Devemos verificar se existem a, b, c e d números reais tais que:

$$\begin{aligned}
 a(1, 2, 1, 0) + b(4, 1, -2, 3) + c(1, 2, 6, -5) + d(-2, 3, -1, 2) &= (1, 0, -1, 0) \\
 \iff (a+4b+c-2d, 2a+b+2c+3d, a-2b+6c-d, 3b-5c+2d) &= (1, 0, -1, 0) \\
 \iff \begin{cases} a+4b+c-2d = 1 \\ 2a+b+2c+3d = 0 \\ a-2b+6c-d = -1 \\ 3b-5c+2d = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a+4b+c-2d = 3 \\ -7b+7d = -2 \\ 5c-5d = -2/7 \\ 0 = 8/7 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Portanto, não é possível escrever $v = (1, 0, -1, 0)$ como combinação linear dos vetores de S .

(c) Devemos verificar se existem a, b, c e d números reais tais que:

$$\begin{aligned}
 a(1, 2, 1, 0) + b(4, 1, -2, 3) + c(1, 2, 6, -5) + d(-2, 3, -1, 2) &= (3, 6, -2, 5) \\
 \iff (a+4b+c-2d, 2a+b+2c+3d, a-2b+6c-d, 3b-5c+2d) &= (3, 6, -2, 5) \\
 \iff \begin{cases} a+4b+c-2d = 3 \\ 2a+b+2c+3d = 6 \\ a-2b+6c-d = -2 \\ 3b-5c+2d = 5 \end{cases} \sim \begin{cases} a+4b+c-2d = 3 \\ -7b+7d = 0 \\ 5c-5d = -5 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} d \in \mathbb{R} \\ c = -1+d \\ b = d \\ a = 4-3d \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Logo, podemos tomar por exemplo $a = 4$, $b = 0$, $c = -1$ e $d = 0$.

3. Sejam $u_1 = (1, 2, 1)$ e $u_2 = (0, 1, -1)$ vetores em $\mathbb{R}^3$, determine:

- (a) Uma combinação linear de u_1 e u_2 .
- (b) O conjunto de todas as combinações lineares de u_1 e u_2 .

Solução:

(a) Tomemos por exemplo: $v = 3u_1 - u_2 = 3(1, 2, 1) - (0, 1, -1) = (3, 5, 4)$.

(b) $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear de u_1 e u_2 se, e somente se, $(x, y, z) = a(1, 2, 1) + b(0, 1, -1) = (a, 2a + b, a - b) \iff \begin{cases} a = x \\ 2a + b = y \\ a - b = z \end{cases} \implies \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \\ b = x - z \end{cases}$
 $\implies y - 2x = x - z \iff 3x - y - z = 0$.

Portanto, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x - y - z = 0\}$ é o conjunto de todas as combinações lineares de u_1 e u_2 .

4. Sejam $p_1(t) = t^2 - 1$ e $p_2(t) = 2t - t^2$ vetores em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, determine:

- (a) Uma combinação linear de $p_1(t)$ e $p_2(t)$.
- (b) O conjunto de todas as combinações lineares de $p_1(t)$ e $p_2(t)$.
- (c) Se $v = t^2 + 2t - 2$ é combinação linear de $p_1(t)$ e $p_2(t)$.

Solução:

(a) Tomemos por exemplo: $p(t) = -2p_1(t) + 3p_2(t) = -2(t^2 - 1) + 3(2t - t^2) = 2 + 6t - 5t^2$.

(b) $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é combinação linear de $p_1(t)$ e $p_2(t)$ se, e somente se, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = a(t^2 - 1) + b(2t - t^2) = -a + (2b)t + (a - b)t^2 \iff$

$$\begin{cases} -a = a_0 \\ 2b = a_1 \\ a - b = a_2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = a_0 \\ b = a_1/2 \\ a - b = a_2 \end{cases} \implies -a_0 - a_1/2 = a_2 \iff 2a_0 + a_1 + 2a_2 = 0.$$

Portanto, $\{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); 2a_0 + a_1 + 2a_2 = 0\}$ é o conjunto de todas as combinações lineares de $p_1(t)$ e $p_2(t)$.

(c) Se $v = t^2 + 2t - 2$, então $2 \times (-2) + 2 + 2 \times 1 = -4 + 2 + 2 = 0$, portanto v é combinação linear de $p_1(t)$ e $p_2(t)$.

5. Sejam $A_1 = I_2$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ vetores em $M_2(\mathbb{R})$.

- (a) Verifique se $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ se escreve como combinação linear de A_1 , A_2 e A_3 , em caso afirmativo verifique se a combinação linear é única.
- (b) Determine o conjunto de todas as combinações lineares de A_1 , A_2 e A_3 .
- (c) Escreva $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ como combinação linear de A_1 , A_2 e A_3 , se possível.

Solução:

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$ é combinação linear de A_1 , A_2 e A_3 se, e somente se, existem a , b e c reais tais que

$$a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + c \cdot A_3 = A \iff a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+b & -b+c \\ 0 & a+2b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ -b+c = 7 \\ a+2b-c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3-b \\ c = 7+cb \end{cases}$$

Logo, para $b = 0$, $a = 3$ e $c = 7$ temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 7 \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ é combinação linear de A_1, A_2 e A_3 se, e somente se, existem a, b e c reais tais que

$$a \cdot A_1 + b \cdot A_2 + c \cdot A_3 = A \Leftrightarrow a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a+b & -b+c \\ 0 & a+2b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = a_{11} \\ -b+c = a_{12} \\ 0 = a_{21} \\ a+2b-c = a_{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a_{11} - b \\ c = a_{12} + b \\ 0 = a_{21} \\ a + 2b - c = a_{22} \end{cases} \Rightarrow a_{21} = 0 \text{ e } a_{22} = a_{11} - a_{12}.$$

Portanto, $\left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{21} = 0 \text{ e } a_{22} = a_{11} - a_{12} \right\}$ é o conjunto de todas as combinações lineares de A_1, A_2 e A_3 .

(c) Como $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $b_{21} = 0$ e $b_{11} - b_{12}3 - 0 = 3 \neq 1 = b_{22}$, portanto B não se escreve como combinação linear de A_1, A_2 e A_3 .

3.5 Subespaço Gerado

1. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathbb{R}^3$:

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x+z=0 \text{ e } x-2y=0\}.$

(b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x+2y-3z=0\}.$

Solução:

(a) Observemos que

$$(x, y, z) \in U \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 0 \\ x-2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = -2y \end{cases}.$$

Portanto, $(x, y, z) \in U \Leftrightarrow (x, y, z) = (2y, y, -2y) = y(2, 1, -2).$

Logo, $S = \{(2, 1, -2)\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathbb{R}^3$.

(b) Observemos que $(x, y, z) \in U \iff x + 2y - 3z = 0 \iff x = -2y + 3z$.

Portanto, $(x, y, z) \in U$ se, e somente se,

$$(x, y, z) = (-2y + 3z, y, z) = (-2y, y, 0) + (3z, 0, z) = y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1).$$

Logo, $S = \{(-2, 1, 0), (3, 0, 1)\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathbb{R}^3$.

2. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$:

(a) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + 3y - 2t = 0 \text{ e } y - z = 0\}$.

(b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - t = 0, y + 5t = 0 \text{ e } y + z - 2t = 0\}$.

Solução:

(a) Observemos que $(x, y, z, t) \in U$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x + 3y - 2t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3y + 2t \\ y = z \end{cases} \implies \begin{cases} x = -3z + 2t \\ y = z \end{cases}.$$

Portanto,

$$(x, y, z, t) \in U \iff (x, y, z, t) = (-3z + 2t, z, z, t) = z(-3, 1, 1, 0) + t(2, 0, 0, 1).$$

Logo, $S = \{(-3, 1, 1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$.

$$(b) \text{ Observemos que } (x, y, z, t) \in U \iff \begin{cases} x - t = 0 \\ y + 5t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -5t \\ z = 7t \end{cases}$$

Portanto,

$$(x, y, z, t) \in U \iff (x, y, z, t) = (t, -5t, 7t, t) = t(1, -5, 7, 1).$$

Logo, $S = \{(1, -5, 7, 1)\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathbb{R}^4$.

3. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço U de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$(a) U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; a_{11} = a_{21} + a_{31} \text{ e } a_{22} = 0 \right\}.$$

$$(b) U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}; a_{11} + 2a_{22} = 0, a_{12} - a_{21} + 3a_{31} + 4a_{22} = 0 \right\}.$$

Solução:

$$(a) \text{ Observemos que } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in U \iff \begin{cases} a_{11} = a_{21} + a_{31} \\ a_{22} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{21} + a_{31} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Uma matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ está em U se, e somente se,

$$\begin{cases} a_{11} + 2a_{22} = 0 \\ a_{12} - a_{21} + 3a_{31} + 4a_{22} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11} = -2a_{22} \\ a_{12} = a_{21} - 3a_{31} - 4a_{22} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a_{22} & a_{21} - 3a_{31} - 4a_{22} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$= a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$.

4. Determine, em cada um dos casos, um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

(a) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_1 = a_2 \text{ e } a_3 = 0\}$.

(b) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_0 + 3a_2 = 0\}$.

(c) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_0 + 2a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \text{ e } 3a_0 + 7a_1 - a_2 - 3a_3 = 0\}$.

Solução:

(a) Observemos que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U \iff$

$$\begin{cases} a_1 = a_2 \\ a_3 = 0 \end{cases} \iff p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = a_0 + a_2t + a_2t^2 = a_0 \times 1 + a_2 \times (t + t^2).$$

Logo, $S = \{1, t + t^2\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) Um polinômio $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U \iff a_0 + 3a_2 = 0 \iff a_0 = -3a_2$

$$\iff p(t) = (-3a_2) + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = a_1 \times t + a_2 \times (-3 + t^2) + a_3 \times t^3.$$

Logo, $S = \{t, -3 + t^2, t^3\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(c) Observemos que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U \iff \begin{cases} a_0 - 2a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ 3a_0 + 7a_1 - a_2 - 3a_3 = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a_0 + 2a_1 + a_2 - 2a_3 = 0 \\ a_1 - 4a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = -9a_2 + 8a_3 \\ a_1 = 4a_2 - 3a_3 \end{cases}.$$

Logo, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U$ se, e somente se

$$p(t) = (8a_3 - 9a_2) + (4a_2 - 3a_3)t + a_2t^2 + a_3t^3 = a_2 \times (-9 + 4t + t^2) + a_3 \times (8 - 3t + t^3).$$

Portanto, $S = \{-9 + 4t + t^2, 8 - 3t + t^3\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

5. Em $M_2(\mathbb{C})$ determine um sistema de geradores para o subespaço

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix}, a_{12} + b_{12}i = 0 \text{ e } a_{21} + b_{21}i = -2(a_{22} + b_{22}i) \right\}.$$

(a) $M_2(\mathbb{C})$ como espaço vetorial real.

(b) $M_2(\mathbb{C})$ como espaço vetorial complexo.

Solução:

$$(a) A = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix} \in U \Leftrightarrow a_{21} + b_{21}i = -2(a_{22} + b_{22}i) \Leftrightarrow \begin{cases} a_{21} = -2a_{22} \\ b_{21} = -2b_{22} \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } A = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix} \in U \text{ se, e somente se,}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ -2a_{22} - 2b_{22}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + b_{11} \cdot \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2i & i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2i & i \end{bmatrix} \right\}$$

é um sistema de geradores para o subespaço U de $M_2(\mathbb{C})$ como espaço vetorial real.

$$(b) \text{ Sendo } z_{jk} = a_{jk} + b_{jk}i, \text{ então } A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \text{ e } A \in U \Leftrightarrow z_{21} = -2z_{22} \Leftrightarrow$$

$$A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ -2z_{22} & z_{22} \end{bmatrix} = z_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é um sistema de geradores para o subespaço U de $M_2(\mathbb{C})$ como espaço vetorial complexo.

6. Em cada um dos casos, determine analiticamente o subespaço U do espaço vetorial V , verifique se U é subespaço próprio de V e exiba um elemento de U .

$$(a) U = [(2, -2), (-1, 1)] \quad \text{em} \quad V = \mathbb{R}^2.$$

$$(b) U = [(1, -1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] \quad \text{em} \quad V = \mathbb{R}^3.$$

$$(c) U \quad \text{é o subespaço gerado pelas colunas da matriz: } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{em} \quad V = \mathbb{R}^3.$$

$$(d) U = [(1, 0, 0, 1), (1, 2, 1, 0)] \quad \text{em} \quad V = \mathbb{R}^4.$$

$$(e) U = [1 - 2t^2 + t^3, 3 + t - 5t^2, t + t^2 - 3t^3] \quad \text{em} \quad V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}).$$

$$(f) U = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{em} \quad V = M_2(\mathbb{R}).$$

$$(g) \quad U = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{em} \quad V = M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

$$(h) \quad U = \left[\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad \text{em} \quad V = M_2(\mathbb{C}) \text{ como espaço vetorial sobre } \mathbb{C} \\ \text{e como espaço vetorial sobre } \mathbb{R}.$$

Solução:

(a) Um vetor $(x, y) \in U$ se, e somente se, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y) = a \cdot (2, -2) + b \cdot (-1, 1) = (2a - b, -2a + b) \iff \begin{cases} 2a - b = x \\ -2a + b = y \end{cases} \implies x + y = 0.$$

$$\text{Logo, } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}.$$

(b) Um vetor $(x, y, z) \in U$ se, e somente se, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y, z) = a \cdot (1, -1, 0) + b \cdot (0, 1, 0) + c \cdot (0, 0, 1) = (a, -a + b, c)$$

$$\iff \begin{cases} a = x \\ -a + b = y \\ c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a = x \\ b = x + y \\ c = z \end{cases}.$$

Não há relação alguma entre x, y e z , portanto são números reais quaisquer, consequentemente $U = \mathbb{R}^3$.

(c) Um vetor $(x, y, z) \in U$ se, e somente se, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y, z) = a \cdot (4, 1, 0) + b \cdot (2, 5, 5) = (4a + 2b, a + 5b, 5b)$$

$$\iff \begin{cases} 4a + 2b = x \\ a + 5b = y \\ 5b = z \end{cases} \iff \begin{cases} 4a + 2b = x \\ 5b = z \\ a = y - z \end{cases} \\ \implies 4y - 4z + 2/5z = x \iff 5x - 20y + 18z = 0.$$

$$\text{Logo, } U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 5x - 20y + 18z = 0\}.$$

(d) Um vetor $(x, y, z, t) \in U$ se, e somente se, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y, z, t) = a \cdot (1, 0, 0, 1) + b \cdot (1, 2, 1, 0) = (a + b, 2b, b, a)$$

$$\iff \begin{cases} a + b = x \\ 2b = y \\ b = z \\ a = t \end{cases} \implies \begin{cases} y = 2z \\ x = z + t \end{cases}$$

$$\text{Logo, } U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = z + t \text{ e } y = 2z\}.$$

(e) Observemos que $p(t) = a - 0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U$, ou seja, se e somente se, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = a \cdot (1 - 2t^2 + t^3) + b \cdot (3 + t - 5t^2) + c \cdot (t + t^2 - 3t^3) \\ &= (a + 3b) + (b + c)t + (-2a - 5b + c)t^2 + (a - 3c)t^3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3b = a_0 \\ b+c = a_1 \\ -2a-5b+c = a_2 \\ a-3c = a_3 \end{cases} \sim \begin{cases} a+3b = a_0 \\ b+c = a_1 \\ b+c = 2a_0+a_2 \\ -3b-3c = a_3-a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -2a_0+a_1 \\ a_3 = a_0-3a_1 \end{cases}$$

Logo, $U = \{p(t) = a - 0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); a_2 = -2a_0 + a_1 \text{ e } a_3 = a_0 - 3a_1\}$.

(f) Uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U$, ou seja, se, e somente se, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a+3b \\ 2c & a+b \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = a_{11} \\ 2a+3b = a_{12} \\ 2c = a_{21} \\ a+b = a_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a_{11} \\ 3b = a_{12} - 2a_{11} \\ 2c = a_{21} \\ b = a_{22} - a_{11} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(a_{22} - a_{11}) = a_{12} - 2a_{11} \Leftrightarrow a_{12} + a_{11} - 3a_{22} = 0.$$

Logo, $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{12} + a_{11} - 3a_{22} = 0 \right\}$.

(g) Uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in U$, ou seja, se, e somente se, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b+c \\ a & a-b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{12} = b+c \\ a_{21} = a \\ a_{22} = a-b \\ a_{31} = c \\ a_{32} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 0 \\ a_{32} = 0 \\ a_{21} = a \\ a_{31} = c \\ a_{21} - a_{22} = b \\ a_{12} - a_{31} = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = a_{32} = 0 \\ a_{21} - a_{22} = a_{12} - a_{31} \end{cases}.$$

Logo, $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}); a_{11} = a_{32} = 0 \text{ e } a_{21} - a_{22} = a_{12} - a_{31} \right\}$.

(h) (h₁) Uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix} \in U$ se, e somente se, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+ai & b-bi \\ 0 & ai \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = a \\ b_{11} = a \\ a_{12} = b \\ b_{12} = -b \\ a_{21} = 0 \\ b_{21} = 0 \\ a_{22} = 0 \\ b_{22} = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = b_{11} = b_{22} \\ b_{12} = -a_{12} \\ a_{21} = b_{21} = a_{22} = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11}i & a_{12} + b_{12}i \\ a_{21} + b_{21}i & a_{22} + b_{22}i \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); \begin{matrix} a_{11} = b_{11} = b_{22}, \\ b_{12} = -a_{12} \text{ e } a_{21} = b_{21} = a_{22} = 0 \end{matrix} \right\}.$$

(h₂) Uma matriz $A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \in U$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que:

$$A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1-i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(1+i) & \beta(1-i) \\ 0 & \alpha i \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} z_{11} = \alpha(1+i) \\ z_{12} = \beta(1-i) \\ z_{21} = 0 \\ z_{22} = \alpha i \end{cases} \iff \begin{cases} z_{11} = \alpha(1+i) \\ z_{12} = \beta(1-i) \\ z_{21} = 0 \\ -iz_{22} = \alpha \end{cases} \implies \begin{cases} z_{11} = (1-i) \cdot z_{22} \\ z_{12} = \beta(1-i) \\ z_{21} = 0 \\ z_{22} = \alpha i \end{cases}.$$

$$\text{Logo, } U = \left\{ \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C}); \begin{matrix} z_{11} = (1-i) \cdot z_{22} \text{ e } z_{21} = 0 \end{matrix} \right\}.$$

7. Em cada um dos casos, determine o subespaço gerado pelo subconjunto S do espaço vetorial V .

- (a) $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ em $V = \mathbb{R}^3$.
 (b) $S = \{(1, 2, 3, -2), (0, 1, -3, 1), (1, 4, -3, 0)\}$ em $V = \mathbb{R}^4$.
 (c) $S = \{1, 1-t, (1-t)^2, (1-t)^3\}$ em $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
 (d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ em $V = M_2(\mathbb{R})$.
 (e) $S = \{\sin x, \cos x\}$ em $V = \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

Solução:

(a) Observemos que $(x, y, z) \in [S]$ existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x, y, z) = a \cdot (1, 1, 1) + b \cdot (1, 1, 0) + c \cdot (0, 1, 1) = (a+b, a+b+c, b+c) \iff$$

$$\begin{cases} a + b = x \\ a + b + c = y \\ b + c = z \end{cases} \sim \begin{cases} a + b = x \\ b + c = z \\ c = y - z \end{cases} \implies \begin{cases} a = x + y - 2z \\ b = 2z - y \\ c = y - z \end{cases},$$

para quaisquer que sejam os números reais x, y e z .

Portanto, $[S] = \mathbb{R}^3$.

(b) Observemos que $(x, y, z, t) \in [S]$ existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) &= a \cdot (1, 2, 3, -2) + b \cdot (0, 1, -3, 1) + c \cdot (1, 4, -3, 0) \\ &= (a+c, 2a+b+4c, 3a-3b-3c, -2a+b) \iff \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + c = x \\ 2a + b + 4c = y \\ 3a - 3b - 3c = z \\ -2a + b = t \end{cases} \sim \begin{cases} a + c = x \\ b + 2c = y - 2x \\ 0 = -9x + 3y + z \\ 0 = 4x - y + t \end{cases}.$$

Portanto, $[S] = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = 9x - 3y \text{ e } t = -4x + y\}$.

(c) Observemos que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in [S]$ existem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = a \cdot 1 + b \cdot (1-t) + c \cdot (1-t)^2 + d \cdot (1-t)^3 \\ &= (a+b+c+d) \cdot 1 - (b+2c+3d) \cdot t + (c+3d) \cdot t^2 - dt^3 \end{aligned} \iff$$

$$\begin{cases} a + b + c + d = a_0 \\ -b - 2c - 3d = a_1 \\ c + 3d = a_2 \\ -d = a_3 \end{cases} \implies \begin{cases} a = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ b = -a_1 - 2a_2 - 3a_3 \\ c = a_2 + 3a_3 \\ d = -a_3 \end{cases},$$

para quaisquer que sejam os números reais a_0, a_1, a_2 e a_3 .

Portanto, $[S] = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(d) Observemos que $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in [S]$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a+3b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{cases} a = a_{11} \\ 2a + 3b = a_{12} \\ 0 = a_{21} \\ a - b = a_{22} \end{cases} \sim \begin{cases} a = a_{11} \\ 3b = a_{12} - 2a_{11} \\ 0 = a_{21} \\ b = a_{11} - a_{22} \end{cases} \implies \begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{12} = 5a_{11} - 3a_{22} \end{cases}.$$

Portanto, $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{12} = 5a_{11} - 3a_{22} \text{ e } a_{21} = 0 \right\}$.

(e) Observemos que $f(x) \in [S]$ existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$.

Logo, $[S] = \{f(x) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}); f(x) = a \cdot \sin x + b \cdot \cos x, \text{ com } a, b \in \mathbb{R}\}$.

8. Em cada um dos casos, determine o menor número de geradores para subespaço $U = [S]$.

(a) $S = \{(1, 2), (-1, -2), (3, 6)\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(c) $S = \{1 + t^2, 1 + t, 1 + 2t^2, 2\}$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

(a) $[S] = [(1, 2)]$, pois $(-1, -2) = (-1) \cdot (1, 2)$ e $(3, 6) = 3 \cdot (1, 2)$.

(b) Como $[(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3$, portanto $[S] = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)]$.

(c) Como $1 + 2t^2 = 2 \cdot (1 + t^2) - (1/2) \cdot 2$ e $[1 + t^2, 1 + t, 2] = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, segue que $[S] = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(d) Como $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, logo $[S] = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$.

9. Em cada um dos casos, determine um sistema de geradores para os subespaços $U + W$ e $U \cap W$ de V e verifique se o subespaço $U + W$ é uma soma direta:

(a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$ e $W = [(1, -3, 2), (2, 5, -7)]$ em $V = \mathbb{R}^3$.

- (b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y = 0 \text{ e } t - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t = 0\}$ em $V = \mathbb{R}^4$.
- (c) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + t = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z = 0\}$ em $V = \mathbb{R}^4$.
- (d) $U = [1 + 2t + t^2, 1 - t + t^2]$ e $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = a_1\}$ em $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (e) $U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ e $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 \right\}$ em $V = M_2(\mathbb{R})$.
- (f) $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A \text{ é simétrica}\}$ e $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}); \text{tr}(A) = 0\}$ em $V = M_3(\mathbb{R})$.

Solução:

- (a) Fazendo como no exercício 7 acima podemos ver que $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$, como $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$, segue que $(x, y, z) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ y = \frac{2}{3}z \\ x = -\frac{5}{3}z \end{cases}.$$

Logo, $(x, y, z) \in U \cap W \iff (x, y, z) = (-\frac{5}{3}z, \frac{2}{3}z, z) = \frac{z}{3} \cdot (-5, 2, 3)$, portanto $U \cap W = [(-5, 2, 3)]$.

Observemos que $(x, y, z) \in U \iff x - 2y + 3z = 0$, consequentemente $U = [(2, 1, 0), (-3, 0, 1)]$, já que $W = [(1, -3, 2), (2, 5, -7)]$ então,

$$U + W = [(2, 1, 0), (-3, 0, 1), (1, -3, 2), (2, 5, -7)],$$

mas como:

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -7 & 0 & 11 & -11 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim$$

segue que $U + W = [(1, -3, 2), (0, 1, -1), (0, 0, 1)] = \mathbb{R}^3$.

- (b) Um vetor $(x, y, z, t) \in U \cap W$ se, e somente se, $\begin{cases} x + y = 0 \\ t - z = 0 \\ z = t = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -x \\ z = t = 0 \end{cases}.$

Logo, $(x, y, z, t) \in U \cap W \iff (x, y, z, t) = (x, -x, 0, 0) = x \cdot (1, -1, 0, 0)$, portanto $U \cap W = [(1, -1, 0, 0)]$.

Já que $(x, y, z, t) \in U \iff x + y = 0 \text{ e } t - z = 0$, então $U = [(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$, da mesma forma, como $(x, y, z, t) \in W \iff z = t = 0$, segue que $W = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)]$, portanto,

$$U + W = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)],$$

mas como:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim$$

segue que $U + W = [(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)]$.

(c) Um vetor $(x, y, z, t) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2z - t = 0 \end{cases}.$$

Logo, $\begin{cases} t = 2z \\ y = -x - z \end{cases}$, e $(x, y, z, t) \in U \cap W \iff (x, y, z, t) = (x, -x - z, z, 2z) = x \cdot (1, -1, 0, 0) + z \cdot (0, -1, 1, 2)$, portanto $U \cap W = [(1, -1, 0, 0), (0, -1, 1, 2)]$.

Já que $(x, y, z, t) \in U \iff x + y - z + t = 0$, então $U = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)]$, e como $(x, y, z, t) \in W \iff x + y + z = 0$, então $W = [(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0)]$, portanto,

$$U + W = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0)],$$

mas como:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

segue que $U + W = [(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)] = \mathbb{R}^4$.

(d) Podemos ver que

$$U = [1 + 2t + t^2, 1 - t + t^2] = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = a_2\},$$

como $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 = a_1\}$, segue que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \cap W$ se, e somente se, $\begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_1 = a_0 \end{cases}$.

Portanto,

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \cap W \iff p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = a_0 + a_0t + a_0t^2 = a_0 \cdot (1 + t + t^2),$$

$$\text{logo } U \cap W = [1 + t + t^2].$$

Como $U = [1 + 2t + t^2, 1 - t + t^2]$ e $W = [1 + t, t^2]$ segue que,

$$U + W = [1 + t, t^2, 1 + 2t + t^2, 1 - t + t^2],$$

mas como:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

segue que $U + W = [1 + t, t + t^2, t^2] = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(e) Podemos ver que $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; a_{12} = -a_{11} \text{ e } a_{21} = a_{22} \right\}$, como

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 \right\}, \text{ segue que } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W$$

se, e somente se, $\begin{cases} a_{12} = -a_{11} \\ a_{21} = a_{22} \\ a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_{12} = a_{11} = 0 \\ a_{21} = a_{22} \end{cases}.$

Portanto, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W \iff A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{21} \end{bmatrix}$, logo

$$U \cap W = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

Como $U = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$ e $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$ segue que,

$$U + W = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

mas como:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array},$$

segue que $U + W = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = M_2(\mathbb{R})$.

(f) Como $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31} \text{ e } a_{23} = a_{32} \right\}$ e

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\}, \text{ logo } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in U \cap W$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \\ a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_{12} = a_{21} \\ a_{13} = a_{31} \\ a_{23} = a_{32} \\ a_{33} = -a_{11} - a_{22} \end{cases}.$$

Portanto, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in U \cap W$ se, e somente se

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & -a_{11} - a_{22} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$U \cap W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Lembrando que $A_{ij} = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R})$ é a matriz tal que $a_{ij} = 1$ e $a_{kl} = 0$ se $k \neq i$ ou $l \neq j$, podemos ver que $\{A_{11}, A_{22}, A_{33}\} \subset U$ e que $\{A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{23}, A_{31}, A_{32}\} \subset W$, logo

$$M_3(\mathbb{R}) = [A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}] \subset U + W \subset M_3(\mathbb{R}),$$

portanto: $U + W = [A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}]$.

10. Considere os subespaços U e W de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$, tais que:

$$U = [u_1, u_2] \quad \text{e} \quad W = [w_1, w_2, w_3].$$

- (a) Mostre que $U + W \subset [u_1, u_2, w_1, w_2, w_3]$ e que $[u_1, u_2, w_1, w_2, w_3] \subset U + W$.
 (b) O que você pode concluir do item (a)?

Solução:

- (a) Um vetor $v \in U + W \iff v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$, como $U = [u_1, u_2]$ e $W = [w_1, w_2, w_3]$, segue que existem $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{K}$ tais que $u = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2$ e $v = b_1 \cdot w_1 + b_2 \cdot w_2 + b_3 \cdot w_3$, logo

$$v = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + b_1 \cdot w_1 + b_2 \cdot w_2 + b_3 \cdot w_3 \implies v \in [u_1, u_2, w_1, w_2, w_3].$$

Portanto, $U + W \subset [u_1, u_2, w_1, w_2, w_3]$.

Reciprocamente, $v \in [u_1, u_2, w_1, w_2, w_3]$ se, e somente se, existem escalares c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 tais que:

$$v = \underbrace{c_1 \cdot u_1 + c_2 \cdot u_2}_{\in U} + \underbrace{c_3 \cdot w_1 + c_4 \cdot w_2 + c_5 \cdot w_3}_{\in W} \in U + W.$$

Logo, $[u_1, u_2, w_1, w_2, w_3] \subset U + W$.

- (b) Podemos concluir do item (a) que se $U = [S_1]$ e $W = [S_2]$, então $U + W = [S_1 \cup S_2]$.

3.6 Dependência e Independência Linear

1. Verifique, em cada um dos casos, se conjunto S é linearmente independente (L.I.) ou linearmente dependentes (L.D.). Justifique sua resposta (faça cálculos somente quando for realmente necessário!)

- (a) $S = \{1 - 2t + t^2, 2 + t, -1 - 3t + t^2\}$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
 (b) $S = \{(1, -2, 1, 0), (2, 1, -1, 3), (7, -4, 1, 3)\}$ em $\mathbb{R}^4$.
 (c) $S = \{x, x^2, e^x\}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
 (d) $S = \{\cosh x, e^x, e^{-x}\}$ em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.
 (e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pi & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 332 \\ 41 & 90 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_2(\mathbb{R})$.
 (f) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_2(\mathbb{C})$, como espaço vetorial real e como espaço vetorial complexo.
 (g) $S = \{(7, -4, 8, 0), (11, -1, 5, 2), (7, 3, 8, -1), (2, -6, 5, 7), (9, 4, 3, -3)\}$ em $\mathbb{R}^4$.
 (h) $S = \left\{ (1, 3, 2, 5, 7), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\}$ em $\mathbb{R}^5$.
 (i) $S = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ em $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial real.
 (j) $S = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ em $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial complexo.

Solução:

- (a) Como $(1 - 2t + t^2) - (-1 - 3t + t^2) = 2 + t$, portanto S é um subconjunto linearmente dependente de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

- (b) Como $\begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 & 5 & -3 & 3 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}$, segue que S é um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^4$.

- (c) Cada uma das funções $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = e^x$ não é combinação linear, por números reais, das demais funções.

Portanto, S é um subconjunto linearmente independente de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

- (d) Como $\cosh x = \frac{1}{2} \cdot e^x + \frac{1}{2} \cdot e^{-x}$, segue que S é um subconjunto linearmente dependente de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$.

- (e) Como $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{M_2(\mathbb{R})} \in S$, então S é um subconjunto linearmente dependente de $M_2(\mathbb{R})$.

- (f) Cada matriz de S não pode ser escrita como combinação linear, por escalares reais, das demais matrizes.

Portanto, S é um subconjunto linearmente independente de $M_2(\mathbb{C})$, como espaço vetorial real.

Como $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = i \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, segue que S é um subconjunto linearmente dependente de $M_2(\mathbb{C})$, como espaço vetorial complexo.

- (g) Como S é subconjunto de $\mathbb{R}^4$ com 5 vetores, segue que S é um subconjunto linearmente dependente de $\mathbb{R}^4$.
- (h) Como os dois elementos de S não são proporcionais, segue que S é um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{R}^5$.
- (i) Como os dois elementos de S não são múltiplos reais, segue que S é um subconjunto linearmente independente de $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial real.
- (j) Como $(1+i) \cdot (1-i, i) = ((1+i) \cdot (1-i), (1+i) \cdot i) = (2, -1+i)$, segue que S é um subconjunto linearmente dependente de $\mathbb{C}^2$ espaço vetorial complexo.

2. Complete, em cada um dos casos, o subconjunto S de modo a formar um conjunto L.I. maximal no espaço vetorial correspondente.

- (a) $S = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^4$.

- (b) $S = \{1 - 2t + t^2, 2 + t\}$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

- (c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_2(\mathbb{R})$.

- (d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ em $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$.

- (e) $S = \left\{ (1, 3, 2, 5, 7), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \right) \right\}$ em $\mathbb{R}^5$.

(f) $S = \{(1-i, i, 2-i), (0, 1+i, -1+i)\}$ em $\mathbb{C}^3$ espaço vetorial complexo.

Solução:

(a) A matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o conjunto L. I. maximal basta incluir na matriz A acima duas linhas obtendo uma matriz na forma escalonada, maximal e sem linhas não nulas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{matrix} A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, os vetores correspondentes à matriz dos coeficientes A' formam o conjunto:

$$\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1), (0, 0, 0, 1)\},$$

um conjunto L.I. maximal de $\mathbb{R}^4$ obtido de S .

(b) A matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o conjunto L. I. maximal, devemos escalonar a matriz A e incluir linhas obtendo uma matriz na forma escalonada, maximal e sem linhas não nulas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, os vetores correspondentes à matriz dos coeficientes A'' formam o conjunto: $\{1-2+t^2, 5t-2t^2, t^2\}$, um conjunto L.I. maximal de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ obtido de S .

(c) A matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o conjunto L. I. maximal basta incluir na matriz A acima duas linhas obtendo uma matriz na forma escalonada, maximal e sem linhas não nulas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, os vetores correspondentes à matriz dos coeficientes A' formam o conjunto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

um conjunto L.I. maximal de $M_2(\mathbb{R})$ obtido de S .

- (d) A matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação à base canônica de $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o conjunto L. I. maximal, devemos incluir a matriz A linhas obtendo uma matriz na forma escalonada, maximal e sem linhas não nulas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, os vetores correspondentes à matriz dos coeficientes A' formam o conjunto:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

um conjunto L.I. maximal de $M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$ obtido de S .

- (e) A matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^5$ é $A =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1/2 & 3/2 & 0 & 5/2 & 7/2 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar o conjunto L. I. maximal, devemos escalonar a matriz A e incluir linhas obtendo uma matriz na forma escalonada, maximal e sem linhas não nulas:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1/2 & 3/2 & 0 & 5/2 & 7/2 \end{bmatrix} &\sim A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, os vetores correspondentes à matriz dos coeficientes A'' formam o conjunto:

$$\{(1, 3, 2, 5, 7), (0, 2, 0, 0, 0), (0, 0, -2, 0, 0), (0, 0, 0, 3, 0), (0, 0, 0, 0, -3)\},$$

um conjunto L.I. maximal de $\mathbb{R}^5$ obtido de S .

- (f) A matriz dos coeficientes dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{C}^3$, como espaço vetorial complexo, é $A = \begin{bmatrix} 1-i & i & 2-i \\ 0 & 1+i & -1+i \end{bmatrix}.$

Para encontrar o conjunto L. I. maximal, devemos incluir linhas a matriz A obtendo uma matriz na forma escalonada, maximal e sem linhas não nulas:

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & i & 2-i \\ 0 & 1+i & -1+i \end{bmatrix} \longrightarrow A'' = \begin{bmatrix} 1-i & i & 2-i \\ 0 & 1+i & -1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, os vetores correspondentes à matriz dos coeficientes A'' formam o conjunto:

$$\{(1-i, i, 2-i), (0, 1+i, -1+i), (0, 0, 1)\},$$

um conjunto L.I. maximal de $\mathbb{C}^3$ obtido de S .

3. Decida se a afirmação dada é (sempre) verdadeira ou (às vezes) falsa. Justifique sua resposta dando um argumento lógico matemático ou um contra-exemplo.

- (a) () Se $\dim W = 3$ e $\mathcal{B}$ é um subconjunto de W com 4 vetores então $\mathcal{B}$ é L.D.
- (b) () Se $\dim W = 3$ e $\mathcal{B}$ é um subconjunto de W com 2 vetores então $\mathcal{B}$ é L.I.
- (c) () Todo subconjunto de um espaço vetorial contendo o vetor nulo é L.D.
- (d) () Se $\dim W = 3$ e $v_1, v_2 \in W$, então $[v_1, v_2] \neq W$.
- (e) () Se $\dim W = 3$ e $v_1, v_2, v_3 \in W$, então $[v_1, v_2, v_3] = W$.

Solução:

- (a) (V) De fato, todo subconjunto de W com mais elementos do que $\dim W$ é L.D.
 - (b) (F) Por exemplo, se $0_V \in \mathcal{B}$, então $\mathcal{B}$ é L.D.
 - (c) (V) De fato, pois $0_V = 0 \cdot v$, para todo $v \in V$, portanto é combinação linear de qualquer vetor de V .
 - (d) (V) Pois, como $\dim W = 3$, então para gerar W é necessário pelo no mínimo três vetores.
 - (e) (F) Se, por exemplo, v_1, v_2, v_3 são vetores L. D. em W , então $[v_1, v_2, v_3] \neq W$.
4. Se $S = \{u, v, w\}$ é um subconjunto L.I. de um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, o que podemos dizer sobre o subconjunto $S' = \{u+v, u-v, u-2v+w\}$? É L.I. ou L.D.?

Solução:

Sejam a, b e c escalares em $\mathbb{K}$, então:

$$a \cdot (u+v) + b \cdot (u-v) + c \cdot (u-2v+w)v_3 = 0_V \iff (a+b+c) \cdot u + (a-b-2c) \cdot v + c \cdot w = 0_V,$$

como $S = \{u, v, w\}$ é um subconjunto L.I. devemos ter:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b - 2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -2b - 3c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $S' = \{u+v, u-v, u-2v+w\}$ é um subconjunto L.I. de V

5. Se u, v, w são vetores linearmente independentes em um espaço vetorial V , mostre que o conjunto $\{u+v, u+w, v+w\}$ é um subconjunto linearmente independente de V .

Solução:

Sejam a, b e c escalares em $\mathbb{K}$, então:

$$a(u+v) + b(u+w) + c(v+w)v_3 = 0_V \iff (a+b) \cdot u + (a+c) \cdot v + (b+c) \cdot w = 0_V,$$

como $S = \{u, v, w\}$ é um subconjunto L.I. devemos ter:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a + c = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b = 0 \\ -b + c = 0 \\ 2c = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\{u+v, u+w, v+w\}$ é um subconjunto L.I. de V .

3.7 Base e Dimensão

1. Determine, em cada um dos casos, uma base e a dimensão do subespaço W :

(a) $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p'(-1) = 0 \text{ e } p(1) = 0\}$ em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(b) Em $\mathbb{R}^5$, W conjunto solução do sistema homogêneo:

$$S: \begin{cases} x + 2y + 2z - t + 3w = 0 \\ x + 2y + 3z + t + w = 0 \\ 3x + 6y + 8z + t + 5w = 0 \end{cases}.$$

(c) $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A \text{ é matriz triangular inferior}\}$ em $M_3(\mathbb{R})$.

(d) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{11} - a_{12} - a_{21} = 0 \right\}$ em $M_2(\mathbb{R})$.

(e) $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_3 = z_2 - 2z_1\}$ em $V = \mathbb{C}^3$ como espaço vetorial real e como espaço vetorial complexo.

Solução:

(a) Um polinômio $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in W$ se, e somente se, $p(1) = 0$ e $p'(-1) = 0$, como $p'(t) = a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2$ segue que:

$$p(t) \in W \iff \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_1 - 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = -3a_2 + 2a_3 \\ a_1 = 2a_2 - 3a_3 \end{cases}.$$

Portanto, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in W$ se, e somente se,

$$p(t) = (-3a_2 + 2a_3) + (2a_2 - 3a_3)t + a_2t^2 + a_3t^3 = (-3 + 2t + t^2) \cdot a_2 + (2 - 3t + t^3) \cdot a_3.$$

Logo, $\{-3 + 2t + t^2, 2 - 3t + t^3\}$ é uma base de W , consequentemente, $\dim W = 2$.

(b) Como $S: \begin{cases} x + 2y + 2z - t + 3w = 0 \\ x + 2y + 3z + t + w = 0 \\ 3x + 6y + 8z + t + 5w = 0 \end{cases}$

$$\sim S': \begin{cases} x + 2y + 2z - t + 3w = 0 \\ z + 2t - 2w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2y + 5t - 7w \\ z = -2t + 2w \end{cases}.$$

Logo, $(x, y, z, t, w) \in W$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} (x, y, z, t, w) &= (-2y + 5t - 7w, y, -2t + 2w, t, w) \\ &= y \cdot (-2, 1, 0, 0, 0) + t \cdot (5, 0, -2, 1, 0) + w \cdot (-7, 0, 2, 0, 1). \end{aligned}$$

Portanto, $\{(-2, 1, 0, 0, 0), (5, 0, -2, 1, 0), (-7, 0, 2, 0, 1)\}$ é uma base de W , consequentemente, $\dim W = 3$.

(c) Uma matriz $A \in W \iff A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$
 $a_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{31} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{32} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{33} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Como as matrizes da combinação linear acima são matrizes distintas da base canônica de $M_3(\mathbb{R})$, segue que são L.I.

Portanto,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é base de W e $\dim W = 5$.

$$(d) \text{ Uma matriz } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in W \iff a_{11} - a_{12} - a_{21} = 0 \iff a_{11} = a_{12} + a_{21} \iff$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} + a_{21} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como o conjunto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ gera W e é constituído de matrizes L.I., segue que é uma base de W , consequentemente $\dim W = 3$.

- (e) Sobre $\mathbb{R}$ escrevemos um elemento $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ da seguinte maneira $(z_1, z_2, z_3) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3)$.

Logo, $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \in W$ se, e somente se,

$$x_3 + iy_3 = (x_2 + iy_2) - 2(x_1 + iy_1) = (x_2 - 2x_1) + i(y_2 - 2y_1) \iff$$

$$\begin{aligned} (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) &= (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, (x_2 - 2x_1) + i(y_2 - 2y_1)) \\ &= x_1(1, 0, -2) + x_2(0, 1, 1) + y_1(i, 0, -2i) + y_2(0, i, i). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1), (i, 0, -2i), (0, i, i)\}$ é L.I e gera W , segue que é base de W e, portanto $\dim_{\mathbb{R}} W = 4$.

Um elemento $(z_1, z_2, z_3) \in W$, para $\mathbb{C}^3$ como espaço vetorial complexo, se, e somente se, $z_3 = z_2 - 2z_1$.

Logo, $(z_1, z_2, z_3) \in W \iff (z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_2 - 2z_1) = z_1 \cdot (1, 0, -2) + z_2 \cdot (0, 1, 1)$.

Portanto, como conjunto $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$ é L.I e gera W , segue que é base de W e, portanto $\dim_{\mathbb{C}} W = 2$.

2. Determine, em cada um dos casos, uma base e a dimensão dos subespaços U , W , $U \cap W$ e $U + W$, e verifique se a soma é direta.

(a) $U = [(1, 0, 1), (1, 1, 3)]$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $U = [(-1, 1, -1), (1, 2, 1)]$ e $W = [(2, 1, 1), (1, 1, -1)]$ em $\mathbb{R}^3$.

(c) U é conjunto solução do sistema homogêneo $S : \begin{cases} 2x + 4y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + 3y - z = 0 \end{cases}$

e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(d) $U = [(1, 2, 1)]$ e $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 - z_2 - z_3 = 0\}$ em $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$.

(e) $U = [(1, 2, 1, 3), (3, 1, -1, 4)]$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = z \text{ e } x - 3y + t = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(f) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + t = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

- (g) $U = \{A \in M_3(\mathbb{R}); \text{tr}(A) = 0\}$ e $W = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A^T = A\}$ em $M_3(\mathbb{R})$.
- (h) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 - 2a_2 = 0\}$ e $W = [1 - t, t - t^2]$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (i) $U = [1 + t + t^2]$ e $W = [1, t - t^2]$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (j) $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_0 = a_1\}$ e $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{C}); a_2 = 0\}$ em $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.
- (k) $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p(0) = p(1) = 0\}$ e $W = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p(-1) = 0\}$ em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
- (l) $U = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ e $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ em $M_2(\mathbb{R})$.
- (m) $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{21} = a_{12} \right\}$ e $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{22} = -a_{11} \right\}$ em $M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

- (a) Como $U = [(1, 0, 1), (1, 1, 3)]$ e estes vetores não são proporcionais, então são L.I., e consequentemente: $\mathcal{B}_U = \{(1, 0, 1), (1, 1, 3)\}$ é base de U , portanto $\dim U = 2$.

Determinando uma base para W :

$$(x, y, z) \in W \iff x = 2y - 3z \iff (x, y, z) = (2y - 3z, y, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (-3, 0, 1).$$

Portanto, $\mathcal{B}_W = \{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ é base de W , consequentemente $\dim W = 2$.

Podemos ver que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2y - z = 0\}$, como $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + 3z = 0\}$, segue que $(x, y, z) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -4y + 4z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ y = z \\ x = -z \end{cases}.$$

Logo, $(x, y, z) \in U \cap W \iff (x, y, z) = (-z, z, z) = z \cdot (-1, 1, 1)$, portanto $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{(-1, 1, 1)\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(1, 0, 1), (1, 1, 3), (2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$.

Agora basta escalonar a matriz 4×3 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada com a última linha nula, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 2), (0, 0, -4)\}$ é base de $U + W$, e portanto $\dim(U + W) = 3$, consequentemente $U + W = \mathbb{R}^3$.

A soma não é direta, pois como vimos acima $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- (b) Como $U = [(-1, 1, -1), (1, 2, 1)]$ e estes vetores não são proporcionais, então são L.I., e consequentemente: $\mathcal{B}_U = \{(-1, 1, -1), (1, 2, 1)\}$ é base de U , portanto $\dim U = 2$.

Da mesma maneira, como $W = [(2, 1, 1), (1, 1, -1)]$ e estes vetores não são proporcionais, então, $\mathcal{B}_W = \{(2, 1, 1), (1, 1, -1)\}$ é base de W , consequentemente $\dim W = 2$.

Podemos ver que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - z = 0\}$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 3y - z = 0\}$, logo $(x, y, z) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - z = 0 \\ -3y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ x = -z \\ y = 0 \end{cases}.$$

Logo, $(x, y, z) \in U \cap W \iff (x, y, z) = (-z, 0, z) = z \cdot (-1, 0, 1)$, portanto $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{(-1, 0, 1)\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(-1, 1, -1), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 1, -1)\}$.

Agora basta escalonar a matriz 4×3 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada com a última linha nula, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(-1, 1, -1), (0, 3, 0), (0, 0, -1)\}$ é base de $U + W$, e portanto $\dim(U + W) = 3$, consequentemente $U + W = \mathbb{R}^3$.

A soma não é direta, pois como vimos acima $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- (c) Podemos ver que $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = -7/2 z \text{ e } y = 3/2 z\}$, logo $(x, y, z) \in U \iff (x, y, z) = (-7/2 z, 3/2 z, z) = \frac{z}{2} \cdot (-7, 3, 2)$, portanto $\mathcal{B}_U = \{(-7, 3, 2)\}$ é base de U e $\dim U = 1$.

Por outro lado, $(x, y, z) \in W \iff y = x + z$, ou seja,

$$(x, y, z) = (x, x + z, z) = x \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (0, 1, 1),$$

portanto $\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ é base de W e $\dim W = 2$.

Observemos que $(x, y, z) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = -7/2 z \\ y = 3/2 z \end{cases} \implies \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Logo, $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset$ é base de $U \cap W$, portanto $\dim(U \cap W) = 0$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-7, 3, 2)\}$.

Agora basta escalonar a matriz 3×3 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 2 & 0 & 0 & -8 \end{array} \sim$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada sem linhas nulas, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, -8)\}$ é base de $U + W$, e portanto $\dim(U + W) = 3$, consequentemente $U \oplus W = \mathbb{R}^3$, soma direta, pois como vimos acima $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

- (d) Como $U = [(1, 2, 1)]$, como este vetor não é o vetor nulo é L.I., e consequentemente: $\mathcal{B}_U = \{(1, 2, 1)\}$ é base de U , portanto $\dim U = 1$.

Determinando uma base para W :

$$(z_1, z_2, z_3) \in W \iff z_1 = z_2 + z_3 \iff (z_1, z_2, z_3) = (z_2 + z_3, z_2, z_3) = z_2 \cdot (1, 1, 0) + z_3 \cdot (1, 0, 1).$$

Portanto, $\mathcal{B}_W = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é base de W , consequentemente $\dim W = 2$.

Podemos ver que $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 = z_3 \text{ e } z_2 = 2z_3\}$, logo $(z_1, z_2, z_3) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} z_1 = z_3 \\ z_2 = 2z_3 \\ z_1 = z_2 + z_3 \end{cases} \implies \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases}.$$

Logo, $U \cap W = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$, $\mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset$ é base de $U \cap W$, portanto $\dim(U \cap W) = 0$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(1, 2, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Agora basta escalonar a matriz 3×3 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \sim & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 2 \end{array}.$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada sem linhas nulas, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(1, 2, 1), (0, -1, -1), (0, 0, 2)\}$ é base de $U + W$, e portanto $\dim(U + W) = 3$, consequentemente $U \oplus W = \mathbb{C}^3$, como espaço vetorial complexo, e a soma é direta, pois como vimos acima $U \cap W = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$.

- (e) Como $U = [(1, 2, 1, 3), (3, 1, -1, 4)]$ e estes vetores não são proporcionais, então são L.I., e consequentemente: $\mathcal{B}_U = \{(1, 2, 1, 3), (3, 1, -1, 4)\}$ é base de U , portanto $\dim U = 2$.

Determinando uma base para W , $(x, y, z, t) \in W$ se, e somente se,

$$x - y = z \text{ e } x - 3y + t = 0 \iff (x, y, z, t) = (x, y, x - y, -x + 3y) = x \cdot (1, 0, 1, -1) + y \cdot (0, 1, -1, 3).$$

Portanto, $\mathcal{B}_W = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3)\}$ é base de W , consequentemente $\dim W = 2$.

Podemos ver que $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t = 0 \text{ e } 7x + 5z - 4t = 0\}$, como $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y = z \text{ e } x - 3y + t = 0\}$, segue que $(x, y, z, t) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - 3y + t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ 7x + 5z - 4t = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -2y + z + t = 0 \\ 2z = 0 \\ -1/2 t = 0 \end{cases}.$$

Logo, $x = y = z = t = 0$ e $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, $\mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset$ é base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3), (1, 2, 1, 3), (3, 1, -1, 4)\}$.

Agora basta escalonar a matriz 4×4 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada sem linhas nulas, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(1, 0, 1, -1), (0, 1, -1, 3), (0, 0, 2, -2), (0, 0, 0, 1)\}$ é base de $U + W$, e portanto $\dim(U + W) = 4$, consequentemente $U + W = \mathbb{R}^4$, a soma é direta, pois como vimos acima $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

(f) Como $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + t = 0\}$, então $(x, y, z, t) \in U$ se e somente se,

$$(x, y, z) = (x, y, x + y + t, t) = x \cdot (1, 0, 1, 0) + y \cdot (0, 1, 1, 0) + t \cdot (0, 0, 1, 1).$$

Portanto, $\mathcal{B}_U = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ é base de U e $\dim U = 3$.

Por outro lado, $(x, y, z, t) \in W \iff z = -x - y$, ou seja,

$$(x, y, z, t) = (x, y, -x - y, t) = x \cdot (1, 0, -1, 0) + y \cdot (0, 1, -1, 0) + t \cdot (0, 0, 0, 1),$$

portanto $\mathcal{B}_W = \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é base de W e $\dim W = 3$.

Observemos que $(x, y, z, t) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2z - t = 0 \end{cases}.$$

Logo, $\begin{cases} x = -y - z \\ t = 2z \end{cases}$, consequentemente $(x, y, z, t) \in U \cap W$ se, e somente se,

$$(x, y, z, t) = (-y - z, y, z, 2z) = y \cdot (-1, 1, 0, 0) + z \cdot (-1, 0, 1, 2).$$

Portanto, $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 2)\}$ é base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 2$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$.

Agora basta escalonar a matriz 6×4 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada com duas linhas nulas, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ é base de $U + W$, e portanto $\dim(U + W) = 4$, consequentemente $U + W = \mathbb{R}^4$, esta soma não é direta, pois como vimos acima $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

(g) Do exercício 9 da seção 3.5 segue que:

$$\mathcal{B}_U = \left\{ A_{11}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_{33} \right\},$$

com $A_{ij} = [a_{ij}] \in M_3(\mathbb{R})$ é a matriz tal que $a_{ij} = 1$ e $a_{kl} = 0$ se $k \neq i$ ou $l \neq j$, é base de U .

Portanto, $\dim U = 6$.

$$\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, A_{23}, A_{31}, A_{32} \right\}$$

é base de W , e portanto, $\dim W = 8$.

$$\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

é base de $U \cap W$, e portanto $\dim (U \cap W) = 5$.

$$\mathcal{B}_{U+W} = \{A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}\}$$

é base de $U + W$, e portanto $\dim (U + W) = 9$ e $U + W = M_3(\mathbb{R})$, a soma não é direta pois $U \cap W \neq \{0_{M_3(\mathbb{R})}\}$.

(h) Como $W = [1 - t, t - t^2]$ e estes polinômios não são proporcionais, então são L.I., e consequentemente: $\mathcal{B}_W = \{1 - t, t - t^2\}$ é base de W , portanto $\dim W = 2$.

Por outro lado, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U$ se, e somente se, $a_0 = 2a_2$, ou seja, se e somente se,

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = p(t) = 2a_2 + a_1t + a_2t^2 = a_1 \cdot t + a_2 \cdot (2 + t^2).$$

Portanto, $\mathcal{B}_U = \{t, 2 + t^2\}$ é base de U , portanto $\dim U = 2$.

Podemos ver que $W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$, como $U = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); a_0 - 2a_2 = 0\}$, segue que $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 - 2a_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = -2a_2 \\ a_1 = a_2 \end{cases}.$$

Logo, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U \cap W \iff p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = (-2a_2) + a_2t + a_2t^2 = a_2(-2 + t + t^2)$, portanto $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{-2 + t + t^2\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim (U \cap W) = 1$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{1 - t, t - t^2, t, 2 + t^2\}$.

Agora basta escalonar a matriz 4×3 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada com a última linha nula, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{1-t, t-t^2, t^2\}$ é base de $U+W$, e portanto $\dim(U+W) = 3$, consequentemente $U+W = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

A soma não é direta, pois como vimos acima $U \cap W \neq \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}\}$.

- (i) Como $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U$ se, e somente se, $p(0) = p(1) = 0$, consequentemente:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \implies p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U$$

$$\iff p(t) = a_1t + a_2t^2 + (-a_1 - a_2)t^3 = a_1 \cdot (t - t^3) + a_2 \cdot (t^2 - t^3).$$

Portanto, $\mathcal{B}_U = \{t - t^3, t^2 - t^3\}$ é base de U , portanto $\dim U = 2$.

Por outro lado, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in W$ se, e somente se, $p(-1) = 0$, se e somente se, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \iff a_3 = a_0 - a_1 + a_2$.

Logo, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in W$ se, e somente se,

$$p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + (a_0 - a_1 + a_2)t^3 = a_0 \cdot (1 + t^3) + a_1 \cdot (t - t^3) + a_2 \cdot (t^2 + t^3).$$

Portanto, $\mathcal{B}_W = \{1 + t^3, t - t^3, t^2 + t^3\}$ é base de W , portanto $\dim W = 3$.

Um polinômio $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in U \cap W$ se, e somente se,

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_3 = -a_1 - a_2 \\ a_3 = a_0 - a_1 + a_2 \end{cases} \implies \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 \in \mathbb{R} \\ a_2 = 0 \\ a_3 = -a_1 \end{cases}$$

Logo, $p(t) \in U \cap W \iff p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 = a_1 \cdot (t - t^3)$, portanto $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{t - t^3\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

Para encontrar uma base de $U+W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U+W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{1 + t^3, t - t^3, t^2 + t^3, t^2 - t^3\}$.

Agora basta escalonar a matriz 4×4 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \sim$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada sem linhas nulas, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{1 + t^3, t - t^3, t^2 + t^3, -2t^3\}$ é base de $U+W$, e portanto $\dim(U+W) = 4$, consequentemente $U+W = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

A soma não é direta, pois como vimos acima $U \cap W \neq \{0_{\mathcal{P}_3(\mathbb{R})}\}$.

- (j) Como $U = [1 + t + t^2]$, como este polinômio não é o polinômio nulo é L.I., e consequentemente: $\mathcal{B}_U = \{1 + t + t^2\}$ é base de U , portanto $\dim U = 1$.

E como $W = [1, t - t^2]$ e estes polinômios não são proporcionais, então são L.I., e consequentemente: $\mathcal{B}_W = \{1, t - t^2\}$ é base de W , portanto $\dim W = 2$.

Observemos que $p(t) \in U \cap W$ se, e somente se, existem escalares complexos α, β e γ tais que:

$$p(t) = \alpha \cdot (1 + t + t^2) = \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (t - t^2) \iff \alpha + \alpha \cdot t + \alpha \cdot t^2 = \beta + \gamma \cdot t - \gamma \cdot t^2$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha = \gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Logo, $U \cap W = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{C})}\}$ e $\mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

Finalmente observemos que $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in U + W$ se, e somente se, existem escalares complexos α, β e γ tais que:

$$\begin{aligned} p(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \underbrace{\alpha \cdot (1 + t + t^2)}_{\in U} + \underbrace{\beta \cdot 1 + \gamma \cdot (t - t^2)}_{\in W} \\ &= (\alpha + \beta) + (\alpha + \gamma) \cdot t + (\alpha - \gamma) \cdot t^2 \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta = a_0 \\ \alpha + \gamma = a_1 \\ \alpha - \gamma = a_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = a_1/2 + a_2/2 \\ \beta = a_0 - a_1/2 - a_2/2 \\ \gamma = a_1/2 - a_2/2 \end{cases}, \end{aligned}$$

quaisquer que sejam a_0, a_1 e a_2 .

Portanto, $U \oplus W = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, é soma direta pois $U \cap W = \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{C})}\}$, e $\dim_{\mathbb{C}}(U + W) = 3$, podemos tomar, por exemplo, a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, $\mathcal{B}_{U+W} = \{1, t, t^2\}$.

- (k) Podemos ver como nos itens acima que $\mathcal{B}_U = \{1 + t, t^2\}$ é base de U , portanto $\dim U = 2$ e que $\mathcal{B}_W = \{1, t\}$ é base de W , portanto $\dim W = 2$.

Observemos que $p(t) \in U \cap W$ se, e somente se, $a_0 = a_1$ e $a_2 = 0$, ou seja, se e somente se, $p(t) = a_0 + a_0 t = a_0 \cdot (1 + t)$.

Portanto, $\mathcal{B}_{U \cap W} = \{1 + t\}$ é base de $U \cap W$, portanto $\dim(U \cap W) = 1$.

Finalmente, pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços sabemos que:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 2 - 1 = 3,$$

portanto $U + W$, subespaço de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ como espaço vetorial complexo, é o próprio $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, ou seja, $U + W = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, esta soma não é direta pois vimos que $U \cap W \neq \{0_{\mathcal{P}_2(\mathbb{C})}\}$.

Podemos tomar, por exemplo, a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ $\mathcal{B}_{U+W} = \{1, t, t^2\}$.

- (l) Como $U = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ e estas matrizes não são proporcionais, então são L.I., e portanto, $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é base de U , portanto $\dim U = 2$.

Da mesma maneira, como $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$ e estas matrizes não são proporcionais, então, $\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é base de W , consequentemente $\dim W = 2$.

Podemos ver que $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; a_{11} = a_{21} \text{ e } a_{22} = a_{11} - a_{12} \right\}$ e que $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; a_{12} = a_{21} \text{ e } a_{22} = 0 \right\}$, logo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W$ se, e

somente se,

$$\begin{cases} a_{11} = a_{21} \\ a_{22} = a_{11} - a_{12} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{22} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_{11} = a_{21} \\ a_{12} = a_{21} \\ a_{22} = 0 \end{cases}.$$

Logo, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W \iff A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{21} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = a_{21} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,
portanto $\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 1$.

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$.

Agora basta escalonar a matriz 4×4 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada com a última linha nula, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de $U + W$ e $\dim(U + W) = 3$, esta soma não é direta, pois como vimos acima $U \cap W \neq \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

(m) Analogamente ao item anterior podemos ver que $\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é base de U , portanto $\dim U = 3$.

Da mesma maneira, podemos ver que $\mathcal{B}_W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é base de W , consequentemente $\dim W = 3$.

Uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W$ se, e somente se, $a_{21} = a_{12}$ e $a_{22} = -a_{11}$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U \cap W$ se, e somente se,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & -a_{11} \end{bmatrix} = a_{11} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + a_{12} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\mathcal{B}_{U \cap W} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $U \cap W$ e $\dim(U \cap W) = 2$.

Finalmente, pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços sabemos que:

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 3 + 3 - 2 = 4,$$

portanto $U + W = M_2(\mathbb{R})$, esta soma não é direta pois vimos que $U \cap W \neq \{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

Podemos tomar, por exemplo, a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ como base de $U + W$:

$$\mathcal{B}_{U+W} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Considere, em cada um dos casos, o espaço vetorial V e o subconjunto S de V . Determine uma base de V obtida pelo complemento de S .

(a) $S = \{(1, 0, -2, 2), (1, 2, -2, 1)\}$ em $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $S = \{(1, -2, 5, 3), (2, 3, 1, -4), (3, 8, -3, -5)\}$ em $V = \mathbb{R}^4$.

(c) $S = \{1 + 4t - 2t^2 + t^3, -1 + 9t - 3t^2 + 2t^3, -5 + 6t + t^3, 5 + 7t - 5t^2 + 2t^3\}$ em $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(d) $S = \{1 + t + t^2 + 3t^3 + 2t^4, 1 + 2t + t^2 + 2t^3 + t^4, 1 + 3t + 2t^2 + t^3 + 2t^4\}$ em $V = \mathcal{P}_4(\mathbb{R})$.

(e) $S = \{(1, 0, -2), (1, 2, 1)\}$ em $V = \mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{C}$.

(f) $S = \{(1, 0, -2), (1, 2, 1), (0, 0, i)\}$ em $V = \mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$.

(g) S é uma base de $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A \text{ é simétrica}\}$ em $V = M_2(\mathbb{R})$.

(h) $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ em $V = M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$

Solução:

- (a) Para obter tal base primeiro escalonamos a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}.$$

Como a matriz à direita acima está na forma escalonada e não tem linhas nulas, incluímos linhas nela de maneira a obter uma matriz 4×4 na forma escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2, 2), (0, 2, 0, -1), (0, 0, 2, 1), (0, 0, 0, 2)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$ pelo complemento do subconjunto S .

- (b) Primeiro escalonamos a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{array} \sim \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}.$$

Como a matriz à direita acima está na forma escalonada e não tem linhas nulas, incluímos linhas nela de maneira a obter para obter uma matriz 4×4 na forma escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 7 & -9 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \{(1, -2, 5, 3), (0, 7, -9, -10), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 6)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^4$ pelo complemento do subconjunto S .

- (c) Primeiro escalonamos a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 4 & -2 & 1 & & 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 9 & -3 & 2 & & 0 & 13 & -5 & 3 \\ -5 & 6 & 0 & 1 & \sim & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -5 & 2 & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Como a matriz à direita acima está na forma escalonada e tem duas linhas nulas, para obter a base procurada excluímos as linhas nulas e incluímos duas linhas de maneira a obter uma matriz 4×4 escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 13 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \{1 + 4t - 2t^2 + t^3, 13t - 5t^2 + 3t^3, -t^2 + t^3, -t^3\}$$

é uma base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ pelo complemento do subconjunto S .

- (d) Primeiro escalonamos a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & \sim & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}.$$

Como a matriz à direita acima está na forma escalonada e não tem linhas nulas, incluímos nela duas linhas de maneira a obter uma matriz 5×5 escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \{1 + t + t^2 + 3t^3 + 2t^4, t - t^3 - t^4, t^2 + 2t^4, 3t^3 - t^4, t^4\}$$

é uma base de $\mathcal{P}_4(\mathbb{R})$ pelo complemento do subconjunto S .

- (e) Primeiro escalonamos a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & \sim & 0 & 2 & 3 \end{array}.$$

Como a matriz à direita acima está na forma escalonada e não tem linhas nulas, incluímos linhas nela de maneira a obter para obter uma matriz 3×3 na forma escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2), (0, 2, 3), (0, 0, 3)\}$$

é uma base de $\mathbb{C}^3$, sobre $\mathbb{C}$, pelo complemento do subconjunto S .

- (f) Primeiro escalonamos a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}.$$

Como a matriz à direita acima está na forma escalonada e não tem linhas nulas, incluímos linhas nela de maneira a obter para obter uma matriz 6×6 na forma escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, -2), (0, 2, 3), (-i, 0, 2 + i), (i, 0, 0), (0, 0, 2i)\}$$

é uma base de $\mathbb{C}^3$, sobre $\mathbb{R}$, pelo complemento do subconjunto S .

- (g) Tomando $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$, a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

que está na

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

forma escalonada sem linhas nulas.

Para obter a base procurada incluímos uma linha nela de maneira a obter uma matriz 4×4 escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$ pelo complemento do subconjunto S .

- (h) Primeiro escalonamos a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 & -2 & -3 & -2 \end{array} \sim \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Como a matriz à direita acima está na forma escalonada e tem uma linha nula, para obter a base procurada excluimos a linha nula e incluimos linhas de maneira a obter uma matriz 6×6 escalonada e sem linhas nulas, por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ pelo complemento do subconjunto S .

4. Sejam $S = \{u, v, w, r, s, t\}$ um subconjunto L.I. de um espaço vetorial V e R um subconjunto de S tal que R tem 3 elementos. Determine:

(a) $\dim [S]$, (b) $\dim [R]$, (c) $\dim ([S] \cap [R])$, (d) $\dim ([S] + [R])$.

Solução:

(a) $\dim [S] = 6$, pois os vetores de S são L. I.

(b) $\dim [R] = 3$, pois todo subconjunto de um conjunto L. I. também é L.I.

(c) $\dim ([S] \cap [R]) \stackrel{R \subseteq S}{=} \dim [R] = 3$.

(d) $\dim ([S] + [R]) \stackrel{R \subseteq S}{=} \dim [S] = 6$.

5. Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V , tais que $\dim U = 4$, $\dim W = 5$ e $\dim V = 7$. Determine quais as possíveis dimensões para $U \cap W$.

Solução:

Sabemos do teorema da soma e da intersecção de subespaços que $\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$, como $\dim U = 4$, $\dim W = 5$, então $\dim (U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim (U + W) = 9 - \dim (U + W)$.

Como U e W são subespaços de $U + W$ e $U + W$ é subespaço V , então

$$\underbrace{\dim W}_{=5} \leq \dim(U + W) \leq \underbrace{\dim V}_{=7}.$$

Logo, se $\dim(U + W) = 5$, então $\dim(U \cap W) = 4$; se $\dim(U + W) = 6$, então $\dim(U \cap W) = 3$ e se $\dim(U + W) = 7$, então $\dim(U \cap W) = 2$.

6. Dado o subespaço $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 3y + 2z = 0\}$, encontre um subespaço W de $\mathbb{R}^3$ tal que $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

Solução:

Como $\mathcal{B}_U = \{(-3, 1, 0), (-2, 0, 1)\}$ é uma base de U , então $\dim U = 2$ para encontrar um subespaço W basta completar $\mathcal{B}_U$ a uma base $\mathbb{R}^3$ e tomar W o espaço gerado pelo vetor incluído.

Tomando $\mathcal{B} = \{(-3, 1, 0), (-2, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ uma base $\mathbb{R}^3$ e $W = [(0, 0, 1)] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0 \text{ e } y = 0\}$ temos $U \oplus W = \mathbb{R}^3$.

7. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $u_1 = (1, -1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 0, 1, 1)$, $u_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $u_4 = (1, 0, 0, 0)$.
- Verifique se o subconjunto $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é L. I. ou L.D.
 - Existe um subconjunto próprio de $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ formado por vetores L.I.'s e que ainda gera U ?
 - O vetor $v = (2, -3, 2, 2) \in U$?
 - Para o subespaço $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$, determine o subespaço $U \cap W$.
 - Determine $\dim U$ e responda justificadamente: o subespaço U coincide com $\mathbb{R}^4$?
 - É possível exibir um vetor $u \in \mathbb{R}^4$, tal que u seja L.I. com uma base de U ?

Solução:

- (a) Vamos escalonar a matriz cujas linhas são as coordenadas dos vetores de S em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim$$

Como a matriz escalonada acima tem uma linha nula segue que S é um subconjunto L.D. de $\mathbb{R}^4$.

- (b) Pelo desenvolvimento acima tomando $\mathcal{B}_U = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ é um subconjunto L.I. de S tal que $U = [\mathcal{B}_U]$, portanto $\mathcal{B}_U$ é uma base de U .
- (c) Observemos que $(x, y, z, t) \in U$ se, e somente se, existem escalares reais a, b e c tais que:

$$(x, y, z, t) = a \cdot (1, 1, 0, 0) + b \cdot (1, 0, 0, 0) + c \cdot (0, 0, 1, 1) = (a + b, a, c, c) \implies z = t.$$

Logo, $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; z = t\}$, e portanto o vetor $v = (2, -3, 2, 2) \in U$.

- (d) Observemos que $(x, y, z, t) \in U \cap W \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ t = z \end{cases}.$

Logo, $U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = 0, z = 0 \text{ e } t = 0\}.$

(e) Pelo desenvolvimento acima $\dim U = 3$, e portanto, $U \neq \mathbb{R}^4$, pois $\dim \mathbb{R}^4 = 4$.

(f) Tomando $u = (0, 0, 0, 1)$, então a forma escalonada da matriz cujas linhas são as coordena-

$$\begin{array}{cccc} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{das dos vetores de } \mathcal{B}_U \cup \{u\} \text{ em relação à base canônica de } \mathbb{R}^4 \text{ é dada por:} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Portanto, $\mathcal{B}_U \cup \{u\} = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$ é subconjunto L.I. de $\mathbb{R}^4$, e portanto uma base de $\mathbb{R}^4$.

8. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ em $M_2(\mathbb{R})$.

(a) Verifique se $C = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ é combinação linear de A e B .

(b) Verifique se o subconjunto $\{A, B, C\}$ é L. I. ou L.D.

(c) Determine o subespaço $U = [A, B]$ e $\dim U$.

(d) Determine o subespaço $W = [A, B, C]$ e $\dim W$.

Solução:

(a) Observemos que $B = 3 \cdot A$, logo uma combinação linear de A e B é uma matriz da forma $a \cdot A + b \cdot B = a \cdot A + b \cdot (3A) = (a + 3b) \cdot A$, com a e b escalares reais.

Logo, como a matriz C não é múltipla de A , segue que C não é combinação linear de A e B .

(b) O subconjunto $\{A, B, C\}$ é L.D., pois $B = 3 \cdot A$.

(c) Uma matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in U$ se, e somente se, existe um escalar real a tal que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a \cdot A = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 2a \\ 0 & a \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a_{12} = 2a_{11} \\ a_{21} = 0 \\ a_{22} = a_{11} \end{cases}.$$

Logo, $U = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{12} = 2a_{11}, a_{21} = 0 \text{ e } a_{22} = a_{11} \right\}$ e $\dim U = 1$, pois é um subespaço gerado por uma matriz não nula.

(d) Uma matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in W$ se, e somente se, existem escalares reais a e b tais que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a \cdot A + b \cdot C = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+4b & 2a+8b \\ 0 & a+6b \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+4b = a_{11} \\ 2a+8b = a_{12} \\ a_{21} = 0 \\ a+6b = a_{22} \end{cases} \implies \begin{cases} a_{12} = 2a_{11} \\ a_{21} = 0 \end{cases}.$$

Logo, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); a_{12} = 2a_{11} \text{ e } a_{21} = 0 \right\}$ e $\dim W = 2$, pois é gerado por duas matrizes linearmente independentes.

9. Sejam $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + z = y \text{ e } t = 0\}$ e $W = [e_1, 3e_3 + e_4]$ subespaços de $\mathbb{R}^4$.

(a) Determine uma base e a dimensão para $U \cap W$, $U + W$.

(b) Verifique se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Solução:

(a) (b) Observemos que $(x, y, z, t) \in W \iff a \cdot e_1 + b \cdot (3e_3 + e_4) = (a, 0, 3b, b) \implies \begin{cases} y = 0 \\ t = 3z \end{cases}$,
logo $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y = 0 \text{ e } t = 3z\}$.

$$\text{Portanto, } (x, y, z, t) \in U \cap W \iff \begin{cases} x + z = y \\ t = 0 \\ y = 0 \\ t = 3z \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Consequentemente, $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Como $\dim U = 2$ e $\dim W = 2$, pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços segue que:

$\dim(U + W) = 2 + 2 - 0 = 4$, ou seja, $U + W$ é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ de dimensão 4, portanto $U \oplus W = \mathbb{R}^4$ e a soma é direta, pois vimos acima que $U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

10. Sejam $U = [(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1)]$ e $W = [(1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)]$ subespaços de $\mathbb{R}^4$, determine uma base e a dimensão de $U + W$ e a dimensão de $U \cap W$ em $\mathbb{R}^4$.

Solução:

Para encontrar uma base de $U + W$ basta extrair um conjunto de geradores L.I. de $U + W$ de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W = \{(1, 1, 0, -1), (1, 2, 3, 0), (2, 3, 3, -1), (1, 2, 2, -2), (2, 3, 2, -3), (1, 3, 4, -3)\}$, para isso basta escalonar a matriz 6×4 cujos elementos são os coeficientes dos respectivos vetores de $\mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_W$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \sim$$

A matriz acima à direita está na forma escalonada com três linhas nulas, logo, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(1, 1, 0, -1), (0, 1, 3, 1), (0, 0, -1, -2)\}$ é base de $U + W$, e portanto $\dim(U + W) = 3$.

Podemos ver também que $U = [(1, 1, 0, -1), (0, 1, 3, 1)]$ e $W = [(1, 2, 2, -2), (0, 1, 2, -1)]$, portanto $\dim U = 2$ e $\dim W = 2$, logo pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços segue que $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1$.

11. Encontre uma base e a dimensão de W subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ gerado pelas funções $f(x) = 1$, função constante igual a 1, $g(x) = \sin x$ e $h(x) = \cos x$.

Solução:

O conjunto $\{1, \sin x, \cos x\}$ é base de W , pois cada uma das funções $f(x) \equiv 1$, $g(x) = \sin x$ e $h(x) = \cos x$ não é combinação linear, por números reais, das demais funções.

E, portanto, $\dim W = 3$.

12. Sejam U e W subespaços de V , espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, com $\dim V = 5$. Se $\dim U = 1$, $\dim W = 4$ e $U \not\subset W$, mostre que $U \oplus W = V$.

Solução:

Já que $\dim U = 1$, então para todo $u \in U$ e u não é vetor nulo, temos $U = [u]$, como $U = [u] \not\subset W$, então $u \notin W$, daí que $U \cap W = \{0_V\}$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

Pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços segue que

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 1 + 4 - 0 = 5,$$

como $U + W$ é subespaço de V e $\dim V = 5$, segue que $U \oplus W = V$.

13. Dê exemplos de dois subespaços U e W de $\mathbb{R}^4$, ambos de dimensão 3, tais que $U + W = \mathbb{R}^4$. Esta soma é direta?

Solução:

No exercício 2 (f) desta seção vimos que os subespaços $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + t = 0\}$ e $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z = 0\}$ de $\mathbb{R}^4$ são tais que $\dim U = 3$, $\dim W = 3$ e $U + W = \mathbb{R}^4$.

Quaisquer que sejam os subespaços U e W de $\mathbb{R}^4$ com $\dim U = 3$, $\dim W = 3$, $\dim(U \cap W) = 2$ e $U + W = \mathbb{R}^4$, pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços, teremos

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 3 + 3 - 4 = 2$$

e portanto $U \cap W \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, consequentemente a soma $U + W = \mathbb{R}^4$ não é direta.

14. Sejam $U = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_3 = 0\}$ e $W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3; z_1 + z_2 = 0 \text{ e } z_3 = 0\}$ subespaços de $\mathbb{C}^3$.

(a) Determine uma base para U , W , $U \cap W$, $U + W$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

(b) Determine uma base para U , W , $U \cap W$, $U + W$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(c) Verifique se a soma $U + W$ é direta em ambos os casos.

Solução:

- (a) Como $(z_1, z_2, z_3) \in U \iff (z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, -z_1) = z_1 \cdot (1, 0, -1) + z_2 \cdot (0, 1, 0)$, então $\mathcal{B}_U = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de U e $\dim_{\mathbb{C}} U = 2$, considerando $\mathbb{C}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

Por outro lado, $(z_1, z_2, z_3) \in W \iff (z_1, z_2, z_3) = (z_1, -z_1, 0) = z_1 \cdot (1, -1, 0)$, então $\mathcal{B}_W = \{(1, -1, 0)\}$ é uma base de W e $\dim_{\mathbb{C}} W = 1$, considerando $\mathbb{C}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

$$\text{Como } (z_1, z_2, z_3) \in U \cap W \iff \begin{cases} z_3 = -z_1 \\ z_2 = -z_1 \\ z_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z_1 = 0 \\ z_2 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases}, \text{ segue que}$$

$$U \cap W = \{0_{\mathbb{C}^3}\} \text{ e } \mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset \text{ e } \dim_{\mathbb{C}}(U \cap W) = 0.$$

Finalmente, pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços temos:

$$\dim_{\mathbb{C}}(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3,$$

segue que $U + W = \mathbb{C}^3$.

Assim, podemos tomar a base canônica de $\mathbb{C}^3$ a base de $U + W$, ou seja, $\mathcal{B}_{U+W} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(b) Pelo desenvolvimento do item(a), considerando $\mathbb{C}^3$ espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, segue que:

$\mathcal{B}'_U = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (i, 0, -i), (0, i, 0)\}$ é uma base de U e $\dim_{\mathbb{R}} U = 4$.

$\mathcal{B}'_W = \{(1, -1, 0), (i, -i, 0)\}$ é uma base de W e $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$.

$\mathcal{B}'_{U \cap W} = \emptyset$ e $\dim(U \cap W) = 0$.

Da mesma forma, pelo teorema da soma e da intersecção de subespaços,

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 4 + 2 - 0 = 6 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^3,$$

segue que $U + W = \mathbb{C}^3$.

Tomando a base canônica de $\mathbb{C}^3$ sobre $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B}'_{U+W} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (i, 0, 0), (0, i, 0), (0, 0, i)\}.$$

(c) Como $U \cap W = \{0_{\mathbb{C}^3}\}$ segue que ambos os casos a soma $U + W = \mathbb{C}^3$ é direta.

15. Determine os possíveis valores para $a \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B} = \{(a, 1, 0), (1, a, 1), (0, 1, a)\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Como o conjunto $\mathcal{B}$ tem três elementos, logo $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^3$ se, somente se, $\mathcal{B}$ é L.I. e isto é equivalente a dizer que:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \iff a^3 - 2a \neq 0 \iff a \cdot (a^2 - 2) \neq 0 \iff \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \sqrt{2} \\ a \neq -\sqrt{2} \end{cases}.$$

Logo, $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, $a \neq 0$, $a \neq \sqrt{2}$ e $a \neq -\sqrt{2}$.

16. Verifique se $\mathcal{B} = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ é uma base de $\mathbb{C}^2$, sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$.

Solução:

Vimos no exercício 1 item (i) da seção 3.6 que $\mathcal{B} = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ é um conjunto L.I de $\mathbb{C}^2$, sobre $\mathbb{R}$, no entanto não é base pois contém 2 elementos e $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$.

Já item (j) do mesmo exercício vimos que $\mathcal{B} = \{(1 - i, i), (2, -1 + i)\}$ é um subconjunto L.D. de $\mathbb{C}^2$ como espaço vetorial complexo, e portanto não é base.

17. Seja V um espaço vetorial de dimensão de finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam U e W subespaços vetoriais de V , então $U \cup W$ é subespaço de V se, e somente se,

- (a) ☐ $U \cup W = U \cap W$.
- (b) ☐ $U \cup W = U + W$.
- (c) ☐ $\dim U + \dim W = \dim V$.
- (d) ☐ $U \cup W = V$.
- (e) ☐ Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução:

Vimos no exercício 5 da seção 3.3 que $U \cup W$ é subespaço de V se, e somente se, ou $U \subset W$ ou $W \subset U$.

Portanto, o item correto é o item (e).

18. Seja V um espaço vetorial de dimensão de finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que $U \oplus W = V$, então:

- (a) ☐ $\mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset$ e $U + W = V$.
- (b) ☐ $U \cap W = \emptyset$ e $U + W = V$.
- (c) ☐ $\dim(U + W) = \dim V$.
- (d) ☐ $U \cap W = \emptyset$ e $\dim U + \dim W = \dim V$.
- (e) ☐ Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução:

Das informações do exercício temos $U \oplus W = V$, logo $U + W = V$ e $U \cap W = \{0_V\}$, e portanto $\mathcal{B}_{U \cap W} = \emptyset$.

Portanto, o item correto é o item (a).

19. Seja V um espaço vetorial de dimensão de finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ e sejam U e W subespaços vetoriais de V tais que $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$, então:

- (a) ☐ $\dim(U \cup W) = 5$.
- (b) ☐ $0 \leq \dim(U \cup W) \leq 2$.
- (c) ☐ $U \subset W$.
- (d) ☐ $5 \leq \dim(U + W) \leq \dim V$.
- (e) ☐ Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução:

Das informações do exercício temos $\dim U = 2$ e $\dim W = 3$.

Como U e W são subespaços de $U + W$, então $\dim(U + W) \geq \dim U = 2$ e $\dim(U + W) \geq \dim W = 3$, e como $U + W$ é subespaço de V segue também $\dim(U + W) \leq \dim V$.

Logo, só podemos afirmar que:

$$\underbrace{\dim W}_{=3} \leq \dim(U + W) \leq \dim V.$$

Assim, o item correto é o item (e).

3.8 Coordenadas de um Vetor e Mudança de Base

1. Em cada um dos casos, encontre as coordenadas do vetor dado em relação à base $\mathcal{B}$ de V .

- (a) $u = (3, -2, 7)$, $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$.
- (b) $p(t) = 5 + 4t + t^2$, $\mathcal{B} = \{1, 1 + t, 1 - t^2\}$ base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ base de $M_2(\mathbb{R})$.

Solução:

$$(a) \quad a \cdot (1, 1, 1) + b \cdot (1, 0, 1) + c \cdot (1, 0, -1) = (3, -2, 7) \iff (a+b+c, a+b, a-c) = (3, -2, 7)$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a = -2 \\ a + b - c = 7 \end{cases} \implies \begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \\ c = -2 \end{cases}.$$

$$\text{Portanto, } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad a \cdot 1 + b \cdot (1+t) + c \cdot (1-t^2) = 5 + 4t + t^2 \iff (a+b+c) + bt - ct^2 = 5 + 4t + t^2$$

$$\iff \begin{cases} a + b + c = 5 \\ b = 4 \\ -c = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Portanto, } [p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \quad a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a+b+c & a+b+d \\ a+c+d & b+c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a + b + c = 4 \\ a + b + c + d = 6 \\ a + c + d = 5 \\ b + c + d = 5 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a + b + c = 4 \\ -b + c + d = 1 \\ -c + d = 2 \\ 3d = 9 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Portanto, } [A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2. Em cada um dos casos, encontre as coordenadas de v_1 e v_2 em relação à base $\mathcal{B}$.

$$(a) \quad v_1 = (3, 2, 3), \quad v_2 = (0, -2, 0), \quad \mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0)\} \text{ base de um subespaço de } \mathbb{R}^3.$$

$$(b) \quad v_1 = -2t^2, \quad v_2 = -1 + 2t + 3t^2, \quad \mathcal{B} = \{t + t^2, t + 1\} \text{ base de um subespaço de } \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

$$(c) \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ base de um subespaço de } M_2(\mathbb{R}).$$

Solução:

$$(a) \ v_1 = (3, 2, 3) = 3 \cdot (1, 1, 1) + (-1) \cdot (0, 1, 0), \text{ logo } [v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$v_2 = (0, -2, 0) = 0 \cdot (1, 1, 1) + (-2) \cdot (0, 1, 0), \text{ logo } [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Não é possível escrever $v_1 = -2t^2$ como combinação linear do vetor de $\mathcal{B} = \{t + t^2, t + 1\}$, portanto não existe $[v_1]_{\mathcal{B}}$.

$$v_2 = -1 + 2t + 3t^2 = 3 \cdot (t + t^2) + (-1) \cdot (t + 1), \text{ logo } [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$(c) \ v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ logo } [v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ logo } [v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Seja $\mathcal{B}' = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1), (1, 0, 1)\}$ base de $\mathbb{R}^3$. Determine:

(a) A matriz mudança da base $\mathcal{B}'$ para a base canônica $\mathcal{B}$.

(b) As coordenadas do vetor $u = (1, 1, 1)$ em relação à base $\mathcal{B}'$.

Solução:

(a) A base canônica de $\mathbb{R}^3$ é $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$, logo: $(1, 0, 2) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3$, $(0, 1, -1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1) \cdot e_3$ e $(1, 0, 1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$.

Portanto, a matriz mudança da base $\mathcal{B}'$ para a base canônica $\mathcal{B}$ é $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

$$(b) \text{ Como } u = (1, 1, 1) = 1 \cdot (1, 0, 2) + 1 \cdot (0, 1, -1), \text{ então } [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. Em $M_2(\mathbb{R})$ consideremos os subespaços $U = [E_{11} + E_{22}, 3E_{12}]$ e $W = [2E_{11} - E_{21}]$, determine:

(a) Uma base ordenada $\mathcal{B}'$ para $M_2(\mathbb{R})$ a partir de uma base do subespaço $U + W$.

(b) A matriz mudança de base de $\mathcal{B}$, da base canônica de $M_2(\mathbb{R})$, para $\mathcal{B}'$, encontrada no item (a).

(c) As coordenadas do vetor $A = E_{11} + 3E_{12} - E_{21} + 4E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\mathcal{B}'$ utilizando a matriz do item (b).

Solução:

(a) Observemos que

$$U + W = [E_{11} + E_{22}, 3E_{12}] + [2E_{11} - E_{21}] \stackrel{CL_4}{=} [E_{11} + E_{22}, 3E_{12}, 2E_{11} - E_{21}].$$

Como os coeficientes das matrizes de $\{E_{11} + E_{22}, 3E_{12}, 2E_{11} - E_{21}\}$ em relação à base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ são dadas por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

segue que $\{E_{11} + E_{22}, 3E_{12}, 2E_{11} - E_{21}\}$ é L.I.

Portanto, $\mathcal{B}_{U+W} = \{E_{11} + E_{22}, 3E_{12}, 2E_{11} - E_{21}\}$ é uma base de $U + W$ e $\mathcal{B}' = \{E_{11} + E_{22}, 3E_{12}, -E_{21} - 2E_{22}, E_{22}\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$ obtida pelo complemento de $\mathcal{B}_{U+W}$.

(b) Como $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ é a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$ e:

$$E_{11} + E_{22} = 1 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22}$$

$$3E_{12} = 0 \cdot E_{11} + 3 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 0 \cdot E_{22}$$

$$-E_{21} - 2E_{22} = 0 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + (-1) \cdot E_{21} + (-2) \cdot E_{22},$$

$$E_{22} = 0 \cdot E_{11} + 0 \cdot E_{12} + 0 \cdot E_{21} + 1 \cdot E_{22}$$

$$\text{então } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ é a inversa de $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ matriz mudança de

base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$, então $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz mudança

de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$.

(c) Sabemos que $[A]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [A]_{\mathcal{B}}$, como $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, então

$$[A]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

5. Em $\mathbb{R}^4$ considere as bases $\mathcal{B}' = \{e_1 + 2e_2, -e_4, e_1, 2e_3\}$ e $\mathcal{B}$ a base canônica, determine:

- (a) $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, a matriz mudança de base de $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$.
 (b) As coordenadas do vetor $u = 3e_1 + e_2 - 4e_4$ em relação à base $\mathcal{B}$ utilizando a matriz do item (a).

Solução:

(a) Como $\mathcal{B}' = \{e_1 + 2e_2, -e_4, e_1, 2e_3\}$, segue que a matriz mudança de base de $\mathcal{B}'$ para a

base $\mathcal{B}$ é dada por: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Sabemos que $[u]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'}$, como

$$u = 3e_1 + e_2 - 4e_4 = \frac{1}{2} \cdot (e_1 + 2e_2) + 4 \cdot (-e_4) + \frac{5}{2} \cdot e_1 \implies [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$[u]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

6. Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ considere as bases $\mathcal{B}$ a base canônica e $\mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1-t^2\}$, para $p(t) = 2 + 4t + t^2$ determine

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad [p(t)]_{\mathcal{B}'}$$

utilizando $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, matrizes mudança de base, de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ e de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$, respectivamente.

Solução:

Como $\mathcal{B}' = \{1, 1+t, 1-t^2\}$, então

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como $[p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, segue que:

$$[p(t)]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

7. Em $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ considere as bases $\mathcal{B}' = \{1-t, t-t^2, t^2-t^3, t^3\}$ e $\mathcal{B}$ a base canônica, determine:
- $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, a matriz mudança de base de $\mathcal{B}'$ para a base $\mathcal{B}$.
 - As coordenadas do vetor $p(t) = 5 + 3t - 8t^3$ em relação à base $\mathcal{B}$ utilizando a matriz do item (a).

Solução:

- (a) Como $\mathcal{B}' = \{1-t, t-t^2, t^2-t^3, t^3\}$, segue que a matriz mudança de base de $\mathcal{B}'$ para a

base $\mathcal{B}$ é dada por: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

- (b) Como $[p(t)]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'}$ e

$$p(t) = 5 + 3t - 8t^3 = 5 \cdot (1-t) + 8 \cdot (t-t^2) + 8 \cdot (t^2-t^3) \implies [p(t)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Consequentemente,

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [p(t)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

8. Sejam V um espaço vetorial real e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base ordenada de V .

- (a) Mostre que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$ também é uma base de V .

- (b) Determine $[v]_{\mathcal{B}'}$, sabendo $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Solução:

- (a) Como $\#\mathcal{B} = 4$, então $\dim V = 4$, consequentemente como $\#\mathcal{B}' = 4$, então basta mostrar que $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$ é L. I., que é equivalente a mostrar que a equação vetorial

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot (v_1 + v_2) + a_3 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) + a_4 \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0_V$$

tem apenas a solução trivial.

Mas,

$$a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot (v_1 + v_2) + a_3 \cdot (v_1 + v_2 + v_3) + a_4 \cdot (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 0_V$$

$$\iff (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \cdot v_1 + (a_2 + a_3 + a_4) \cdot v_2 + (a_3 + a_4) \cdot v_3 + a_4 \cdot v_4 = 0_V.$$

Como $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ é base de V segue que a única solução da equação acima é:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}.$$

Portanto, $\mathcal{B}' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3 + v_4\}$ é base de V .

$$(b) \text{ Como } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ então } M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

9. Sejam $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{B}$ é a base canônica ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determine:

(a) A base $\mathcal{B}'$.

$$(b) [v]_{\mathcal{B}'} \text{ sabendo que } [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$(c) [u]_{\mathcal{B}} \text{ sabendo que } [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Solução:

$$(a) \text{ Como } M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \text{ então } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, então

$$\begin{cases} v_1 = 1/2 \cdot (e_1 + e_2 + e_3) = (1/2, 1/2, 1/2) \\ v_2 = 1/2 \cdot (e_1 - e_2 + e_3) = (1/2, -1/2, 1/2) \\ v_3 = 1/2 \cdot (e_1 - e_2 - e_3) = (1/2, -1/2, -1/2) \end{cases}.$$

Portanto,

$$\mathcal{B}' = \left\{ (1/2, 1/2, 1/2), (1/2, -1/2, 1/2), (1/2, -1/2, -1/2) \right\}.$$

$$(b) [v]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

$$(c) [u]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

10. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,2)\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(-1,0), (1,1)\}$, e $\mathcal{B}_2 = \{(-1,-1), (0,-1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$.

Determine: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1}$, $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2}$, $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$, $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

Solução:

Como $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\mathcal{B}_1 = \{(-1, 0), (1, 1)\}$, e $\mathcal{B}_2 = \{(-1, -1), (0, -1)\}$, então:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Como $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_1})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, segue que:

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, como

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1} \cdot M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_2})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

11. No itens abaixo determine a matriz $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ mudança de base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$ base canônica e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$.

(b) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ base canônica e $\mathcal{B}' = \{2, 1-t, 1-t^2, 2t-t^3\}$.

Solução:

(a) Como $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, -1)\}$ e $\mathcal{B}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \implies M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

(b) Já que $\mathcal{B}' = \{2, 1-t, 1-t^2, 2t-t^3\}$ e $\mathcal{B}$ é a base canônica de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, então:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

12. Sejam $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo $\mathbb{C}$ e os subespaços vetoriais $U = [1+it, (1-3i)t]$ e $W = [2t+(1-i)t^2]$.

(a) Mostre que $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}) = U \oplus W$.

(b) Encontre uma base $\mathcal{B}'$ de $U \oplus W$, distinta de $\mathcal{B}$ base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$.

(c) Determine a matriz $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ mudança de base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{B}'$.

(d) Encontre as coordenadas de $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ em relação à base $\mathcal{B}'$ utilizando a matriz do item (c).

Solução:

- (a) Como $U = [1 + it, (1 - 3i)t]$ e os polinômios $p_1(t) = 1 + it$ e $p_2(t) = (1 - 3i)t$ não são proporcionais, segue que são L. I. e $\mathcal{B}_U = \{1 + it, (1 - 3i)t\}$ é uma base de U .

Por outro lado, W é gerado pelo polinômio $p_3(t) = 2t + (1 - i)t^2$ que não é o polinômio nulo, portanto é L.I. e $\mathcal{B}_W = \{2t + (1 - i)t^2\}$ é uma base de W .

Observemos que

$$U + W = [1 + it, (1 - 3i)t] + [2t + (1 - i)t^2] \stackrel{CL_4}{=} [1 + it, (1 - 3i)t, 2t + (1 - i)t^2].$$

Como os coeficientes dos polinômios de $\{1 + it, (1 - 3i)t, 2t + (1 - i)t^2\}$ em relação à base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$ são dadas por:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 - 3i & 0 \\ 0 & 2 & 1 - i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 - 3i & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i \end{bmatrix},$$

segue que $\{1 + it, (1 - 3i)t, 2t + (1 - i)t^2\}$ é L.I.

Portanto, $\mathcal{B}_{U+W} = \{1 + it, (1 - 3i)t, 2t + (1 - i)t^2\}$ é uma base de $U + W$ e $\dim(U + W) = 3 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, conseqüentemente $U + W = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$.

Como $\dim(U \cap W) = \dim(U + W) - \dim U - \dim W = 3 - 2 - 1 = 0$, então $U \cap W = \emptyset$.

Logo, $\mathcal{P}_2(\mathbb{C}) = U \oplus W$.

- (b) A base $\mathcal{B}' = \{1 + it, (1 - 3i)t, 2t + (1 - i)t^2\}$, obtida no item (a). é uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, sobre $\mathbb{C}$, distinta da base canônica.

- (c) Como $\mathcal{B}' = \{1 + it, (1 - 3i)t, 2t + (1 - i)t^2\}$ e $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ é a base canônica de

$\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$, então $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 - 3i & 2 \\ 0 & 0 & 1 - i \end{bmatrix}$, conseqüentemente:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 1 - 3i & 2 \\ 0 & 0 & 1 - i \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (3-i)/10 & (1+3i)/10 & (1-2i)/5 \\ 0 & 0 & (1+i)/2 \end{bmatrix}.$$

$$[p(t)]_{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot [p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (3-i)/10 & (1+3i)/10 & (1-2i)/5 \\ 0 & 0 & (1+i)/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$(d) = \begin{bmatrix} a_0 \\ \frac{(3-i)a_0 + (1+3i)a_1 + (2-4i)a_2}{10} \\ \frac{(1+i)a_2}{2} \end{bmatrix}.$$

13. Em $\mathbb{R}^3$ considere as bases ordenadas $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (0, 2, 3), (0, 2, -1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

(a) Encontre as coordenadas $[u]_{\mathcal{B}}$ e $[u]_{\mathcal{B}'}$ para $u = (3, 5, -2)$.

(b) Determine a matriz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ mudança de base de $\mathcal{B}'$ para $\mathcal{B}$ e verifique que $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'} = [u]_{\mathcal{B}}$.

Solução:

(a) Como $a \cdot (1, 1, 1) + b \cdot (0, 2, 3) + c \cdot (0, 2, -1) = (3, 5, -2)$, ou seja,

$$\begin{cases} a & & & = & 3 \\ a + 2b + 2c & = & 5 \\ a + 3b - c & = & -2 \end{cases} \sim \begin{cases} a & & & = & 3 \\ & 2b + 2c & = & 2 \\ & & -4c & = & -8 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } [u]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, $a \cdot (1, 1, 0) + b \cdot (1, -1, 0) + c \cdot (0, 0, 1) = (3, 5, -2)$ e portanto,

$$\begin{cases} a + b & = & 3 \\ a - b & = & 5 \\ & c & = & -2 \end{cases} \sim \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \\ c = -2 \end{cases} \implies [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Como

$$\begin{aligned} (1, 1, 0) &= 1 \cdot (1, 1, 1) - \frac{1}{4} \cdot (0, 2, 2) + \frac{1}{4} \cdot (0, 2, -1) \\ (1, -1, 0) &= 1 \cdot (1, 1, 1) - \frac{1}{2} \cdot (0, 2, 2) - \frac{1}{2} \cdot (0, 2, -1), \\ (0, 0, 1) &= 0 \cdot (1, 1, 1) + \frac{1}{4} \cdot (0, 2, 2) - \frac{1}{4} \cdot (0, 2, -1) \end{aligned}$$

$$\text{então } M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [u]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = [u]_{\mathcal{B}}.$$

14. Em $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ considere as bases $\mathcal{B} = \{2, 1-t, 1-t^2\}$ e $\mathcal{B}'$ a base canônica.

(a) Encontre a matriz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ mudança de base de $\mathcal{B}'$.

(b) Determine $[p(t)]_{\mathcal{B}}$, para $p(t) = 7 - 2t + t^2$.

Solução:

(a) Como $\mathcal{B} = \{2, 1-t, 1-t^2\}$ e $\mathcal{B}'$ a base canônica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, então:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \implies M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) Já que $p(t) = 7 - 2t + t^2$, então Por outro lado, como $[p(t)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, segue que:

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \cdot [p(t)]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$